

2026 年 4 月

第 1 讲：函数同构：一些模型

导数同构

主讲：

高考备考讲义

本讲摘要

从历年真题和模拟题看导数同构的一些做法

1.1 同构法核心基础

定义

定义 1.1.1 (同构核心恒等式). 同构的本质是利用指数与对数的互化, 核心工具为:

$$x = \ln e^x = e^{\ln x}$$

由此衍生出最常用的同构对应关系:

$$x \leftrightarrow \ln x, \quad e^x \leftrightarrow x, \quad x + \ln x \leftrightarrow e^x + \ln x$$

分析

同构的核心原则: 1. 结构: 将不等式两边变形为完全相同的函数形式; 2. 单调: 外层函数必须单调, 才能直接脱去外层; 3. 凑形: 通过补项、乘除、取对数等操作, 构造统一结构。

1.2 经典例题精讲

1.2.1 2025 武汉八市联考 T8

Example

已知不等式 $axe^x + \ln \frac{a}{x} \leq x^2 - x$ 对任意 $x > 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解：

注记（易错点提醒）：

1.2.2 例 2: 2025 华师一附中 T8

Example

已知不等式 $\frac{e^{x-e}}{a} \geq e + \ln(ax)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

解:

注记 (易错点提醒):

1.2.3 2016 山东 T22

Example

已知函数 $g(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a - 1 \geq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

解:

注记 (易错点提醒):

1.2.4 2025 届巴蜀 (2503)

Example

已知不等式 $e^x + \frac{1}{e} \geq (a + \frac{1}{ex})(\ln a + \ln x)$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

解:

注记 (易错点提醒):

1.3 个人总结