易错整理

错题1

左右同乘勿漏，上下绝对值/正负勿抄漏
交并看清
中位近似
二项式展开标正负
各项奇偶分差要体现一下(用性质说一下中间步)
集合元素互异
线段最值 须在端值取到(eg：重线取到)
正余弦不变标错
$\sin A > \cos B$：锐△.(如果只有一个锐角是行不通的)→全角锐 二联
分讨分段要注意，especially "0"
关注先决条件 eg：正项等比数列，基底...
数列下标对齐/差1
关注变量上下界
读题，不要想当然解题，据题做题 见招拆招.
T_{1P} 的 T_1 千万不要伤/丢
辅助角公式 $\sqrt{A^2+B^2}$ 也错过...
$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ 忍记
最小就是所有情况中的最小.(7±2T₂)
选项link
把好算的部分的题先解决.

25.6.5. 避开那些坑(数)

1. $g(x)$恒$\geq n$（三根）, 先提醒自己n要正, (很容易忘) → 正负!
同n

2. 公式应用条件.

eg: $\log_a b^c$: 关注如果 $c\log_a b$, $\boxed{c偶b负}$ 但b正.

$q^{k+1}=2 \not\Rightarrow q=2^{\frac{1}{k+1}}$ (q负)

$((-1)^{\frac{m}{n}}$ ✗$)$ $\varnothing$

3. 操作类问题注顺序

4. easy的大题要验算, 不要为前大题找答案 (多种方法验算)!

5. 概率. 记住 中位数比平均数更靠谱.

6. $f(x)$零点数/单调性会分类讨论, 对于分界点处的值单独讨论不要漏!

7. 求 $\bar{x}<0$ 与求, 写类似 (2505武五) → 他还是基础, 那么就要 写完整. 审题!

8. 马尔可夫链 $X_n \to X_{n+1}$ (2505武五: 1,2,3换球)

~~$P_n + (1-P_n)P$~~

$a\cdot P_n + b\cdot(1-P_n)$

事件与全概率公式.

1,2,3 ⇄ 1,2,3 可换 (取同)

2同 ⇄ 2同 可换

都有, 勿漏. 考虑全面!

9. 结构考虑. eg: 2进制 2^n: 100000...

2^n-1: 111111...

引论!

10. (保=核立几扣分) → 二面角要体现一下. (采分点谈)

11. 答案写对, 写对, 标对!

概率基础概念剖析

1. $\cap$ 与 $\cup$，积与和.

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$， $M=\{1,2\}$ ， $N=\{2,3,4\}$

→ $P(MN)=\frac{1}{6}$ $(M\cap N)$ $P(MN)=P(M)\cdot P(N)$ 独立

A对B发生的概率无影响，not A对B发生没影响

2. $P(M\cup N)=P(M)+P(N)-P(MN)$ 容斥原理

和开 积交

3. 互斥：不会同时发生：无公共样本点

↳ $P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$ 不代表AB对立

4. $P(A)$ ，$P(B)>0$： ~~A与B独立与互斥~~

A，B 独立，互斥不同时成立

5. $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ A下B概率

6. 全： $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$. (两两互斥.) $P(A_i)>0$.

$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)$

$=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+\cdots=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

贝叶斯： $P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$ → 全.

Inspiration!

No.

Date

…把过程写干净，思考到位，真不会怎样的字写工整。

考前必看（2025.4.16. NB二模考前校订版）

祖训：能比别人高5分的地方，除数不为0，开方取正负，定义域优先.

斜率还有k存在，二次项系数0，开闭区间，过一点在一点切线，空集，换元后还元，n≥2（a_n…），平行线不重合.

① 注意问与问，选项间的联系与铺垫

②参数（2404NB二模 $x=my+t$）和点斜式（$y=kx+m$）不用着急代（最后代）

↳化简与结构整体性

③ 小题做仔细

④ 解几定：先猜后证

⑤ 一步错步步错，重开（圆曲步步自查，数列代入1，2验算）

⑥题干内置信息注意！（2504台二模立几BD点标错，2503温二模3条路线看成2条
2411 NB一模 Tip直接不理小题完）

⑦ 临门一脚计算准！36×9 ≠ 304 $\frac{16}{12}\neq1.5$，33−25=8，not 7

⑧ 比大小与正负号

⑨ 导数题：必探根，敢放缩！

$ab=1$，a,b正，$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ min

当心！

⑩ 概率题写事件！

⑪ 不要以为便在端点取最值 W （抛物线. 2502X2T T11立几，）

2020年的一个小题涌着关于a，b对称的结果并非a=b取.

⑫ 不要如写（2502 X2T，即便设问过定主，也要区分定义
然后只写四个字"斜边中线"没用的）

（2504 NB二模 导数"取"了不同的"
也是如写，要一个一个写出来，才给分）

⑬：函数方程是可分类讨论的，即你已经知道ans了，不用求解，直接代ans讨论

⑭ 直线反求斜率！零，无，30°，60° ↗30°，30°.，正方体6个面.

⑮ 含根与增根：关注点的位置，特殊情况的图形必然.

（ep：线段上，延长线上……）

⑯（2409 X2T）如图不要如图，绝对值要打上（除非描述了）

⑰ 等差数列可以递减，公差可为0！

⑱ 集合元素互异！

⑲ 比例（对比性）不要弄反

KOKUYO

No.

Date . .

→误写成(-a, -b)

20. 一二象限对称 $(a,b) \to (-a,b)$

21 2505 核核. Vieta 正负标错.

No.
Date . .

定义：充要 "⇔" 等价转化 eg：~~绝对值~~

性质：必要 } → 条件翻译得全不全 eg：极偏 { ~~构函/化代：充要~~

判定：充分 对均：充分

[平方是不等价运算] "⇒"

端效/降点 必要，充分性检验.

即证/等价于证

(只需证/试证 → 猜 (加强证明) (去猜充分性)

解方程/不等式是等价运算，检验意识.

求/写出 范围.

KOKUYO

Correction

1. $g(x)=\ln x-\frac{x}{a}+1+\frac{b}{a}\le 0$ 求证 $ab\le\frac{1}{2e}$

错误想法：以根代参造Cauchy

正解：$g'(x)=\frac{a-x}{ax} \Rightarrow g(x)\le g(a)=\ln a+\frac{b}{a}\le 0$

$\Rightarrow ab\le -a^2\ln a$. 即证.

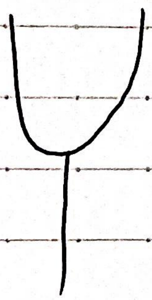
2. 到角公式：顺时针转！

3. 点距公式：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$（注意根号）

4. 残差：观测－预测

5. (1问) 抛物线的定义（有限制的）

点Q到点$(0,\frac{1}{4})$距比到x轴距离大$\frac{1}{4}$



不要乱拆绝对值！

6. $D(X)=E(X^2)-E^2(X)\ge 0$ （易记反）

7. R? r? 与1比? 含义? (2304杭二模) (2501武五调)

Cauchy? (2410天域78)

R^2越大，残差平方和小，拟合效果越好

一元线性，$R^2=r^2$

No. 2306T21

No.

Date

小题易错：复数 (复杂运算一定不能凭直观sense)

①.复数不比大小

② $(a+bi)^2$ 可能是纯虚数 $(a=b\neq0)$

③. $|z_1|=|z_2| \Rightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$

④ $|z_1|=|z_2| \not\Rightarrow z_1^2=z_2^2$ (很易错. 定义不同, 也可写三角)

简单数论分析

(2025届东北师大附)

1. 曲线C $\frac{x|x|}{4}+y^2=1$，曲线上是否有无数个整点？

→平方数性质.

$x\ge0$: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(有界性) ⇒ $(2,0)$ $(0,1)$ $(0,-1)$

$x<0$. $-\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (无界) 整点. ∵ $1-y^2$ 整，x^2 整且含因子 2^2

设 $x=2k$. ⇒ $y=\pm\sqrt{1+k^2}$ (平方数加1不会是平方数.

2.(2409 XZT)

四元整数集 $\{a,b,c,d\}$ 划分: $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ 使 $ab-cd=1$. 则该子集"本位"

证明: $\forall n\in N^*$ 且 $n\ge2$, $\{1,2,3\cdots\cdots 4n\}$ 不能划分成n个两两不相交的"本位"四元子集.

*奇偶性分析

反证: 若可以划分为 $S_1, S_2, S_3\dots S_n$.

由于 $ab-cd=1$ ⇒ ab, cd 一奇一偶 ⇒ a,b,c,d 中至多两个偶数

⇒ 至多 $2n$ 个偶数，而也就 $2n$ 个偶数 ⇒ 每个子集两奇两偶.

不妨 $S_i=\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ ⇒ $a_ib_i-c_id_i=\pm1$.

偶 偶 奇 奇

但事实上取不到了.

$\{a_1, b_1, a_2, b_2\dots a_n, b_n\}=\{2,4\dots 4n\}$

$\{c_1, d_1, c_2, d_2\dots c_n, d_n\}=\{1,3,\dots 4n-1\}$

差1 一一对应

有点像那个放置白子的理论与实际模型

$a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n=(c_1+1)(d_1+1)(c_2+1)(d_2+1)\dots(c_n+1)(d_n+1)$

陷阱: 把1改成i也行

但 ~~$a_1b_1=c_1d_1+1$. ⇒ $c_1+d_1=0$ ✗ / $c_1+d_1=-2$ ✗ 那完蛋~~

$a_ib_i\le c_id_i+1<(c_i+1)(d_i+1)$ ($\{a_i,b_i\}$能 $=(c_i+1)(d_i+1)$ $i\ne1$)

3.(24/25广东一调)

$f(x)$ 满足 $\forall x_1, x_2\in R$, 当 $x_1-x_2\in M$, 都有 $f(x_1)-f(x_2)\in M$, 则称 $f(x)$ 是M连续的

证明: 若 $f(x)$ 是 $[2,3]$ 连续的, 则 $f(x)$ 是 $\{2\}$ 连续的且 $\{3\}$ 连续的.

连续推离散: 最小公倍)

$2\le x_1-x_2\le 3$, $f(x_1)-f(x_2)\in[2,3] \Rightarrow f(x+2)-f(x)=2$, $f(x+3)-f(x)=3$

[不等式变等式：夹逼准则] ($M\le x\le m$)

2×3 3×2 (写成夹逼等式)

考虑 $f(x+6)-f(x)$

一方面，$f(x+6)-f(x)=[f(x+6)-f(x+4)]+[f(x+4)-f(x+2)]+[f(x+2)-f(x)]\ge 2\times3=6$

另一方面，$f(x+6)-f(x)=[f(x+6)-f(x+3)]+[f(x+3)-f(x)]\le 2\times3=6$

$\Rightarrow f(x+6)=6+f(x) \Rightarrow$ 上述等号全取.

(4.)(2411金华十校)(整体法)

正n边形上每个顶点上均有一个数. 一个变换T将正n边形该顶点上的数变为相邻两数的算术平均数. $T(a_i)=\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$, a_n圆排列.

若$T(a_i)=a_i$, 问: $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n$. → *这和等差数列等价的

x

y z

$2y-x$ $2z-x$

$3y-2x$ $3z-2x$

$4y-3x$ $4z-3x$

… …

归纳，~~若n为奇偶~~

首尾能接上

$(t-1)y-(t-2)x$ ~~$(t-1)z-(t-2)x$~~

$ty-(t-1)x$ $tz-(t-1)x$

$t\cdot\frac{y+z}{2}-(t-1)x$

思考. 改为几何平均数 $\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}$ → 等比数列 (取对后等差)

平方平均数：平方后等差.

调和平均数：取倒后等差

[数列等价性]

No. 2300 T21

No.

Date

简单数论分析

5.(2501 22 · XD)

定义：$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$b_n=n^2$.

已知 $n\le 2025$，求满足下列条件的正整数 n 的个数.

对于每一个给定的 n，存在 $k, l\in N^+$，使得 $a_{n+k}-a_k$ 为完全平方数.

$\frac{n(n+2k+1)}{2}$ 为完平　　找构造

anal：分类：① n 奇：奇 × 偶 → 约去2，　$k=\frac{n-1}{2}\Rightarrow 2k+1=n\Rightarrow \frac{2n^2}{2}=n^2$ ✓

(奇全2k+1)　　$(n=1:\ \frac{1(2k+2)}{2}=k+1:\ k=a^2-1)$ ✓

② n 偶：分类：偶 × 偶：要考虑 mod 2 的次数

$n=2^m\cdot t$，t 为奇 $\Rightarrow a_{n+k}-a_k=2^{m-1}\cdot \underbrace{t(n+2k+1)}_{奇}$

① 2^{m-1}：$m-1$ 奇：m 偶 X

② m 奇 $\Rightarrow 2^{m-1}$ 中 $m-1$ 为偶，可被开平方

下考虑 $t(n+2k+1)$ 开平方的情形

$\square^2\cdot t\Rightarrow 2k=\square^2\cdot t-n-1$

$k=\frac{\square^2\cdot t-n-1}{2}$，可取.（□为大于 n 的奇数）

6.(2502 X2T：无穷递降）模去若干次2后必有奇.

eg. 求不定方程 $x^2+y^2=3u^2+3v^2$ 的整数解.

①：$(0,0,0,0)$

② 设 (x_1,y_1,u_1,v_1) 适合方程 → 　$x^2 \bmod 3: 0, 1\Rightarrow 0+0$.

$\Rightarrow x_1=3x_2$

$y_1=3y_2$. $\Rightarrow 9x_2^2+9y_2^2=3u^2+3v^2$

$\Rightarrow (u, v, \frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{3})$ 也适合方程.

无穷递降 + 循环构造

同理，u, v：$\Rightarrow (\frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{3}, \frac{u_1}{3}, \frac{v_1}{3})$

也适合方程

(也即，不存在最小)

当3被mod尽，非整数 $\Rightarrow (\frac{x_1}{3^n}, \frac{y_1}{3^n}, \frac{u_1}{3^n}, \frac{v_1}{3^n})$

$\Rightarrow$ 没有　　* not 成比例.

Date

7. 循环构造解 Pell 方程

$x^2-2y^2=1$ 的正整解. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$\Rightarrow 1=3^2-2\times2^2=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) \Rightarrow 1=(3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2=17^2-2\times12^2$

平方差. 即 $(17,12)$.

一般解法. $x^2-Dy^2=1$. 其中 D 不为完全平方数. 第一组解 (x_1,y_1).

$x_1^2-Dy_1^2=1 \Rightarrow (x_1+\sqrt{D}y_1)(x_1-\sqrt{D}y_1)=1 \Rightarrow (x_1^2+Dy_1^2+2x_1y_1\sqrt{D})(x_1^2+Dy_1^2-2x_1y_1\sqrt{D})=1$

即 $(x_1^2+Dy_1^2)^2-D\cdot(4x_1^2y_1^2)=0$. $\Rightarrow$ 第二组解. $(x_1^2+Dy_1^2,\ 2x_1y_1)$

归纳. $x_n+\sqrt{D}y_n=x_1+\sqrt{D}y_1$

$\sum\varepsilon a_i$, $\varepsilon=\{0,\pm1\}$ 选不选 "+" or "−" (3进制)

8. (2025 山东名校联盟 进制) 暗含互异

无穷数列 $\{a_n\}$ 各项正整, $a_1=1$, $A_n=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$, $\forall n\in N^*$, 从 A_n 中取不同的若干项. 这些项进行 $\boxed{\text{加减法}}$ 运算后所得数绝对值构成的正整数集合 B_n, 若 $B_n=\underbrace{\{1,2,\cdots a_1+a_2+\cdots+a_n\}}_{\text{共 } S_n \text{ 项}}$

则 $\{a_n\}$ 完美. (1). 若等差数列 $\{a_n\}$ 完美, 问公差 d 能取值.

(2). $\{a_n\}$ 完美, 且这些绝对值还互不相同, 证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+1}<1$.

求和

补: 若: $a_{n+1}\geq2S_n+1$, $\Rightarrow a_n\geq3^{n-1}$ 第二数归, 假设 $n\leq k$ 时 $a_n\geq3^{n-1}$, $\Rightarrow n=k+1$

$a_{k+1}\geq2(a_1+\cdots+a_k)+1\geq2\cdot\frac{3^k-1}{2}+1=3^k$

核心

(2): $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \cdots\ a_n$, 每项前乘 $\varepsilon\in\{-1,0,1\}$, 共 3^n 种填法, 且没有全 0,

绝对值出现 $\frac{3^n-1}{2}$ 种. 而 B_n 共 S_n 项

$\Rightarrow S_n=\frac{3^n-1}{2} \Rightarrow a_n=3^{n-1}$

而 $3^{n-1}+1\geq2^n \rightarrow (1+2)^{n-1}+1\geq$

(放缩法 & 比) $1+2^1+\cdots+2^{n-1}$

$=2^n$.

Campus

No.
Date

简单数论分析.

9.(殊途同归)(同途 actually)(分类思想) 分类思想

(广东3月T19).

递增正整数列$\{a_n\}$,奇项奇,偶项偶,只有一个奇数的数列也行.

将首项都取自$\{1,2,3\dots n\}$的所有交错数列个数记为A_n.

(1).证明:取自$\{1,2\dots n\}$ $(n\geq 3)$的首项不为1的交错数列个数为A_{n-2}.

(2).记数列$\{A_n\}$的前n项和为S_n,问$S_n>2025$成立的n_{min}.

9.(1).证明: $\boxed{a_1\geq 3}$ 设$a_1, a_2\dots a_m$是一种取法

则 $a_1-2, a_2-2\dots a_m-2\in\{1,2,3\dots n-2\}$ 即A_{n-2}.

(对应,关注特殊元素)

(2). $a_1\geq 3$: A_{n-2}.

$a_1=1\begin{cases} n=1 & :1个 \\ n\geq 2. & A_{n-1} \end{cases}$ → 排开第一项: $b_{j-1}=a_j-1$ $(2\leq j\leq m)$.

$b_1\sim b_{m-1}$: A_{n-1}.

$\Rightarrow A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+1$

(武汉二调).

集合元素最大值不超过n+2.

$n\in N^*$, $|A|$:元素个数, $\min(A)$.取最小元素.

非空数集$A\subseteq\{1,2,3\dots n\}$. 且 $|A|\leq\min(A)$,则称A为n阶完美集.

a_n为全部n阶完美集的个数.

$\min(A)$在变大, $|A|$同.

✓B. n阶完美集所有元素加1 就是(n+1)阶完美集 ✓

C: 若A为(n+2)阶…, $|A|>1$且$n+2\in A$,则A个数为$a_{n+1}-n$

✓D. 若A为(n+2)阶…, $|A|>1$且$n+2\notin A$,则…为$a_{n+1}-n-1$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+1.$

$a_n=C_n^1+C_{n-1}^2+C_{n-2}^3+\dots$

$|A|=1$ $|A|=2$

有n+2: a_n+1

无n+2: a_{n+1}

$1+C_n^1+C_{n-1}^2+\dots$

$|A|=1$ $|A|=2$ $|A|=3$ … (因为固定了一个元素).

KOKUYO

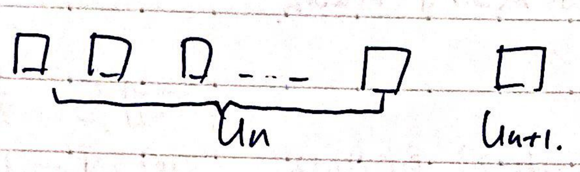
(深二模)　　　n0个只能2个

1,2…n 号座位，至少选2个，不相邻，社交排位

(1). 一排座位（n个），社交排位：u_n. 问u_n递推

(2). 一圈座位，社交排位：r_n，问$\{r_n\}$中第2025个奇数

解：(1)



分类. $\Rightarrow u_{n+2}=u_{n+1}+u_n+n$.

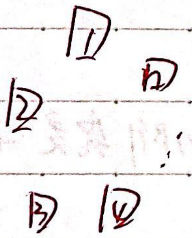
	✓	×	u_n
选2个	×	✓	u_{n-1}
选1个	×	✓	$n-1$

(2). $r_1=r_2=r_3=0$, $r_4=2$, $r_5=5$.

从线到圈.

: u_n.

分类比对



: r_n

差：u_n-r_n
- only 选1选n：1种
- 选1, n，在3, 4, …n-2中的1个：$n-4$
- 选1, n，在3, 4…n-2中的≥2个 $\Rightarrow u_{n-4}$

$\Rightarrow u_n-r_n=1+(n-4)+u_{n-4}$，找奇偶性

对比计数(关键)

比对u_n中什么情况是排不进来的

简单数论分析

9(读)(某二-)(递推中的分类思想)

系统中每个元件正常工作概率 $0<p<1$，独立。有于一半个元件正常工作，则可靠。

(1). $2k-1$ 个元件，(k正整)，P多少？

(2). (1)中增加2个元件，问可靠的增加趋势

[高下立判：用通项 or 用递推]

解：(1). $P_k=\sum_{i=0}^{k-1} C_{2k-1}^{i}(1-p)^i p^{2k-1-i}$ (要求行 k 个) $=$ 行 $(k+1)$ 个：$P_k-C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k-1}$ 反向

行 k 个：$C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k-1}$

(2). way I：用递推.

$2k+1$ 可拆分为 $2k-1$ 个和后2个，$2k+1$ 要求行 $k+1$ 个

- $2k-1$ 个已经行了 $(k+1)^+$ 个，那2个全概率.
- $2k-1$ 个中恰好行了 k 个，那2个要一个 → C_{2k-1}^{k}
- $2k-1$ 个中恰好行了 $(k-1)$ 个(不满足(1))，那2个都行 → related to I

其余先要

$$P_{k+1}=P_k-C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k-1}+C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k-1}[1-(1-p)^2]+C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}(1-p)^k$$

$$\Rightarrow P_{k+1}-P_k=p^k(1-p)^k[pC_{2k-1}^{k-1}-C_{2k-1}^{k}(1-p)]=C_{2k-1}^{k-1}p^k(1-p)^k\underline{[2p-1]}.$$

即 p 谈

由于比较多，related to P_k

way II：写通项，利用组合恒等式(特殊元素)

$$C_{2k+1}^{i}=\underbrace{C_{2k-1}^{i}+2C_{2k-1}^{i-1}}+C_{2k-1}^{i-2}$$

$$P_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}C_{2k+1}^{i}(1-p)^i p^{2k+1-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{2k-1}^{i}(1-p)^i p^{2k+1-i}+2\sum_{i=0}^{k-1}C_{2k-1}^{i}(1-p)^{i+1}p^{2k-i}+\sum_{i=0}^{k-2}C_{2k-1}^{i}(1-p)^{i+2}p^{2k-1-i}.$$

与 P_k 对比同系数

$$=P_k[\underbrace{p^2+2(1-p)p+(1-p)^2}_{=1}]+C_{2k-1}^{k}(1-p)^k p^k(2p-1)$$

No.

Date

对前页的问题再做一步情境上的联系

2n-1局n胜的乒乓球比赛.

每局甲胜：p，乙胜(1-p)、比赛结束时，甲最终获胜概率为P_n

(1)若$P_3>P_2$，即p，5局3胜比3局2胜更有利，问p范围

(2)若$\{P_n\}\uparrow$，什么意思：局数↑，对实力强者更有利.

P_n P_{n-1}局

2n+1局、2n-1局再2局 (不妨赛满，不影响获胜概率
(同利))

三二、赛满三局(赢 | 提前之后后面相当于全概率)

3局中甲赢X局. $p=P(X=2)+P(X=3)$ $X\sim(3,p)$

五三、$X\sim(5,p)$ $p=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$.

10(2505) 校二校T/P，进制5 抽屉原理. T8题略. (13克)

Campus

2306 T21 No. 奈何转化运0.1... Date ... C_k^j 值。

两点分布设法

1.(2306) 甲乙投，若命中则再投，投丢则换投，$P_{甲中}=0.6$，$P_{乙中}=0.8$。第一次甲投或乙投，概率均为0.5。 → 注意事件描述与全概率公式书写

(1). 第i次投篮者为甲 P

(2). 已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1,2,\dots,n$，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}q_i$。 记前n次（从第1次～第n次投篮）中甲投篮的次数为Y，求E(Y)。 → 事件拆分

解(1). 记"第i次投篮者为甲"为事件 A_i，"……为乙"为事件 B_i。

$P(A_{i+1})=P(A_iA_{i+1})+P(B_iA_{i+1})=P(A_{i+1}|A_i)\cdot P(A_i)+P(A_{i+1}|B_i)\cdot P(B_i)$.

设 $P(A_i)=p_i$，则. $p_{i+1}=0.6p_i+(1-0.8)(1-p_i)=0.4p_i+0.2$ → 马尔链。

可得 $p_i=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{1}{3}$.

(2). 由(事件拆分) 设随机变量定义 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次投篮的人是甲\\0, & 第i次投篮的人是乙\end{cases}$，$(i=1,2,\dots,n)$. → 只要符合要么…要么…就行.

(X_i满足两点分布)

由(2) $P(X_i=1)=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{1}{3}$.

由定义：$Y=X_1+X_2+\dots+X_n$（有=1，无=0，有点向量作元的feel）

所以 $E(Y)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}P(X_i=1)=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{1}{3})=\frac{n}{3}+\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^{n}]$

2.(2406台州高二期末)

一串由0,1组成的序列，仅有数字0排列(相连)称为由0构成的游程，1同样。在由m个0和n个1随机构成的序列，记作 $a_1a_2\dots a_{m+n}$。 → 只考虑特定的项，其实每个值都是一样的(考虑定件)

记事件 $A_1=\{a_1=1\}$，$A_k=\{a_{k-1}=0, a_k=1\}$，$k=2,3,\dots,m+n$.

(1) 求 $P(A_1)$，$P(A_2)$ (2). 求游程个数期望 → 拆分：A_k发生则1的游程数+1。

$\frac{n}{m+n}$ $\frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$

设随机变量 $X_k=\begin{cases}1\\0\end{cases}$，$X_k=|a_{k+1}-a_k|$，$k=1,2,\dots,m+n-1$

变化次数 变n次第n+1个游程.

游程数 $X=\sum_{k=1}^{m+n-1}X_k+1$

$E(X)=\sum_{k=1}^{m+n-1}E(X_k)+1=1+\frac{2mn}{m+n}$

$\frac{2mn}{(m+n-1)}$ $(m+n-1)$

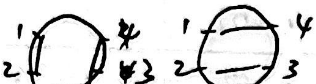
考虑首尾捆绑连接，圆排列，再考虑开口(从不同位) → 坑：这元素独立吗？

KOKUYO

3.25届雅礼月考6 → 其实是正多边形.

圆上2n个点，两两连线，线段之间不交叉

已知满足要求的每种连法出现的概率相等(古典概型)，如

n=2时  出现的可能. 记一次连法中，共有

Y对相邻的两朵花连在一起.

(1). n=4, Y的期望与分布列

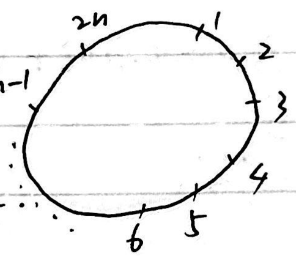
(2). 对随机变量 X_i ($i=1,2,\dots m,\ m\in N^*$) 有 $E(\sum_{i=1}^{m}X_i)=\sum_{i=1}^{m}E(X_i)$

设满足条件的连接方法总数为 a_{2n}，Y期望为 E_{2n}，求 $E_2\cdot E_4\cdots E_{2n}$

(用n, a_{2n}表示)

解.(2). 思路，事件拆分

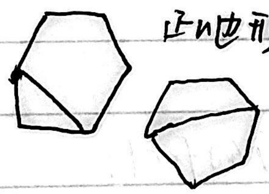
定义随机变量 $X_i=\begin{cases}1: 第i个点与第i+1个点相连\\ 0: 第i个点与第i+1个点不相连\end{cases}$



[不重不漏，每个都只考虑和他后一个相连的情况]

再定义 $X_{2n}=1$：2n与1相连

$X_{2n}=0$：2n与1不相连. 则 $Y=\sum_{i=1}^{2n}X_i$ (定义) $\Rightarrow E(Y)=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i)$

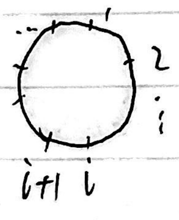
[①: Catalan  正n边形的三角形划分，如用乘法原理]

$t_n=t_0t_{n-1}+t_1t_{n-2}+t_2t_{n-3}+\dots+t_{n-1}t_0$

母函数, $t_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

本题中, $a_{2n}=a_{2n-2}\cdot a_0+a_2\cdot a_{2n-4}+a_4\cdot a_{2n-6}+\dots$ → 只考虑1与谁连

边边划分个数.



连i+1 $\Leftrightarrow$ 剩下2n-2个点满足连法. $P(X_i=1)=\frac{a_{2n-2}}{a_{2n}}$ (都一定)

$\Rightarrow E(Y)=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i)=\frac{2na_{2n-2}}{a_{2n}}\ (n\geq 2)=E_{2n}$.

$E_2\cdot E_4\cdot E_6\cdots E_{2n}=\frac{2a_0}{a_2}\times\frac{4a_2}{a_4}\times\cdots\times\frac{2na_{2n-2}}{a_{2n}}=\frac{a_0\cdot n!\cdot 2^{n}}{a_{2n}}$

$E_2=1,\ a_2=1\Rightarrow a_0=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{n!\,2^{n-1}}{a_{2n}}$.

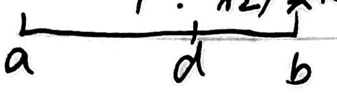
古代论证.

1. $a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}$, $a<b$, 证 $\exists c\in\mathbb{Q}$ 使 $a<c<b$.

$\rightarrow$ 令 $c=\frac{a+b}{2}$.

2. $a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}$, $a<b$, 证 $\exists d\in C_R\mathbb{Q}$ 使 $a<d<b$

$1:\sqrt{2}$ / 其他无理比例.



3. $a\in C_R\mathbb{Q}, b\in C_R^{\mathbb{Q}}$, $a<b$, 证 $\exists e\in\mathbb{Q}$, 使 $a<e<b$.

$\rightarrow$ $b-a>0$. $\exists n\in\mathbb{N}^*$ 使 $n>\frac{1}{b-a}$ 即 $b-a>\frac{1}{n}$. (阿基米德)

考虑所有形如 $\frac{m}{n}$ 的有理数, $m\in\mathbb{Z}$. (实数构造与分析)

可找到一个 m: $\frac{m}{n}\le a<\frac{m+1}{n}$

所以 $\frac{m}{n}<a<\frac{m}{n}+\frac{1}{n}<a+b-a=b$.

$\therefore \frac{m+1}{n}$ 即为这个数.

①沿问问错题推进
②用人话翻译条件定义

常用解题手段 (ft. 25.5.18. 沈Tiger)

例: $S_n=\{X \mid X=(x_1,x_2,\dots x_n),\ x_i\in\{0,1\},\ i=1,2,\dots,n,\ n\ge 2\}$ (0,1向量)

$A=(a_1,a_2\dots a_n)$, $B=(b_1,b_2\dots b_n)\in S_n$

定义 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ (人话: a_i, b_i 不一样的个数)

设 $P\subseteq S_n$, P中有m个元素 ($m\ge 2$), 记P中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$.

(1). $\forall A,B,C\in S_n$, 证 $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)$ 三数中至少一个为偶.

(2). 证 $\bar{d}(P)\le \frac{mn}{2(m-1)}$

(3). 设P中所有两元素间最小距离 $\bar{d}_{min}$.

① 证明: $m\le 2^{n-\bar{d}+1}$

② 若 $2\bar{d}>n$, 证明: $m\le 2\left[\frac{\bar{d}}{2\bar{d}-n}\right]$

③ $n=8$, $\bar{d}=5$, 求 m_{max}

④ $n=2^p$, $\bar{d}=2^{p-1}$, 问 m_{max}.

link 平均值思想: α,β,γ 互不同锐, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ 中大于 $\frac{1}{2}$ 个数的最大值
①不能均 $>\frac{1}{2}$, 不然乘起来就 飞了.
②构造.

解: (1). 途径①: 整体法判奇偶 (eg: 三数和偶, 三数积偶)

途径②: 反证法: 全奇导矛盾

途径③: 利用绝对值的性质

绝对值不改奇偶. $|a_i-b_i|+|b_i-c_i|+|c_i-a_i|\equiv(a_i-b_i+b_i-c_i+c_i-a_i)\equiv 0 \pmod 2$

(2). 平均值 ~ 总量 ~ $\boxed{\text{算两次}}$

$S_{总}=C_m^2\cdot\bar{d}(P)$ → "effectiveness"

考虑元素的贡献 (2503 NB十校 T14, 2017 清华领军 T14)

$a_{11}, a_{12}, a_{13}\dots a_{1j}\dots a_{1n}$

$a_{21}, a_{22}, a_{23}\dots a_{2j}\dots a_{2n}$

$\vdots$

$a_{i1}\ a_{i2}, a_{i3}\dots a_{ij}\dots a_{in}$

$\vdots$

$a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\dots a_{mj}\dots a_{mn}$

考虑第j列中共 t_j 个0, $(m-t_j)$ 个1.

$\Rightarrow$ 总量 $S_{总}=\sum_{j=1}^{n}(m-t_j)t_j\le\sum_{j=1}^{n}\frac{m^2}{4}=\frac{m^2n}{4}$.

(二次函数/基本不等式)

$\Rightarrow \bar{d}(P)\le\frac{mn}{2(m-1)}$

No.

Date

(2) ① 联系 2^n 含义 — 取子集（$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$；n个元素要么取要么不取）— 反正同一个东西（?）

$m\le\cdots$：用于刻画，给出 $n,\bar d$，m 搭配能放多少个。

去除后方 $\bar d-1$ 个，剩余搭配 $2^{n-\bar d+1}$ 种放法 $\Rightarrow m\le 2^{n-\bar d+1}$.

② 较为大胆的 $\boxed{\text{性质迁移}}$：$\bar d(p)$ 成立的式子对 $\bar d_{(m,n)}$ 也能用，但很难想。

若 $2\bar d>n$，$\bar d\le\frac{mn}{2(m-1)}\Rightarrow 2(m-1)\bar d\le mn$. $2\bar d m-2\bar d\le mn$.

$2\bar d\ge m(2\bar d-n)\Rightarrow m\le\frac{2\bar d}{2\bar d-n}$. 若 m 为偶，$\Rightarrow\frac{m}{2}\le\frac{\bar d}{2\bar d-n}$，对右取整仍成立.

m 为奇，则不一定成立

m 为奇：$(m-t_j)t_j$：$\frac{m}{2}$ 元取整意义考虑 $\frac{m+1}{2}$：$(m-t_j)t_j\le\frac{m^2-1}{4}$. (离散二次函数 max)

据此反解：$m\le\frac{n}{2\bar d-n}<\frac{2\bar d}{2\bar d-n}$：不能取到，所以取整没事.

$\frac{n}{2\bar d-n}<\left[\frac{2\bar d}{2\bar d-n}\right]$　　$x-1<[x]\le x$

③ 代②：$m\le 4$. 构造.

0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 0 0 0

0 0 0 1 1 1 1 1

1 1 1 0 0 1 1 1

$n=2^p$，$\bar d=2^{p-1}$

④ 一方面，$p=1$：$n=2,\bar d=1$，4个全可放. 递推. $(A)\to(A,A),(A,\bar A)$ $\Rightarrow\times 2$. (全概率公式)

$\Rightarrow m$ 可以取到 2^{p+1} (检验 $\begin{smallmatrix}(A,\bar A)\\(B,B)\end{smallmatrix}$ 不重不漏)

另一方面，当 $m\ge 2^{p+1}+1$，我们来推导矛盾.

考虑一类特殊情况，若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{k1}=0$. $(k=2^p+1)$ 式1　抽屉原理，至少k个

再由 $C_k^2\bar d=\sum_{j=2}^{n}t_j(k-t_j)\le\sum_{j=2}^{n}\frac{k^2}{4}\le\frac{k^2(n-1)}{4}\Rightarrow\bar d\le\frac{k^2(n-1)}{2\cdot 4\cdot k(k-1)}=\frac{k(n-1)}{2(k-1)}$

忽略第一列

$=\frac{2^{2p}-1}{2\cdot 2^p}$

$=\frac{2^{2p}-1}{2^{p+1}}$

$<2^{p-1}$，矛盾.

T19. 近期命题与解读

作者：JK

前言

1. 本集册选用近期各地/名校模拟卷压轴/新定义题 ~~选编~~
2. 一切以数学组给出的方向与要求为准，以及往年高考压题!!!
3. (JK自己的解读)

2023届高考前出的四省联考，压轴考察曲线加密，

2023高考没出新定义，但最后一题改成了解几+函数(不过把绝对值的考点杀回)

2024届高考前九省联考，压轴考察数论中的费马小定理.

一般这种状况下，奥论/补习班导向都是疯狂研究此类"新背景"，然后鼓吹同学去疯狂刷这种背景，做"增加知识储备"的假象，事实上这样的用处不大. Quote 数学组上届备课组长李晓东老师的原话(my teacher now) "你了解再多的背景，如果学不会审题读题，运算能力不过关，还是不得分." 也可见的，某红书上那些研究二级结论/秒杀/新背景，只教巧法不教扎实的，下场一般都很惨，也就是说，就算是数学竞赛生，拿个国际金牌的，也不一定能拿高分.

(我们考察能力，做题品质，不以难度超纲)

加油!

(PS：瞎操心一下：关注一下那些排列组合与概率的大题，我们不是很吃得来那类题)

再PS：如果题目上难度了，那么评分标准就会向简单的小问倾斜

So 提基础问就很重要，以下是几个常见错点，一定一定要敏感

- 函数定义域
- 除数不为0
- 斜率存不存在
- 子集空不空
- 单调性与变号零点检验.
- etc.

☆☆☆ 最重要的提分路径!!!

集合论·构造与逻辑

19. 将所有平面向量组成的集合记作 R^2，f 是从 R^2 到 R^2 的映射，记作 $\vec{y}=\overline{f(x)}$ 或 $(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)$，其中 $\vec{x}=(x_1,x_2)$，$\vec{y}=(y_1,y_2)$，x_1，x_2，y_1，y_2，都是实数. 定义映射 f 的模为：在 $|\vec{x}|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}=1$ 的条件下 $|\vec{y}|$ 的最大值，记作 $\|f\|$.若存在非零向量 $\vec{x}=R^2$，及实数 λ 使得 $f(\vec{x})=\lambda\vec{x}$，则称 λ 为 f 的一个特征值.

（1）若 $f(x_1,x_2)=(\frac{1}{3}x_1,x_2)$，求 $\|f\|$；1 .

（2）如果 $f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1-x_2)$，计算 f 的特征值，并求相应的 $\vec{x}$；$\sqrt{3}$: $\vec{x}=m(\sqrt{3}+1,1)$
$-\sqrt{3}$, $\vec{x}=m(1-\sqrt{3},1)$

（3）若 $f(x_1,x_2)=(a_1x_1+a_2x_2,b_1x_1+b_2x_2)$，要使 f 有唯一的特征值，实数 a_1，a_2，b_1，b_2 应满足什么条件？试找出一个映射 f，满足以下两个条件：①有唯一的特征值 λ；②$\|f\|=|\lambda|$，并验证 f 满足这两个条件.

$a_1=\lambda$, $a_2=0$.
$b_1=0$, $b_2=\lambda$

(构造游戏类问题，
依8画，ε)
↓
给自己考场限时

(2024.台州二模)

设 A，B 是两个非空集合，如果对于集合 A 中的任意一个元素 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 和它对应，并且不同的 x 对应不同的 y；同时 B 中的每一个元素 y，都有一个 A 中的元素 x 与它对应，则称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一一对应，并称集合 A 与 B 等势，记作 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$．若集合 A 与 B 之间不存在一一对应关系，则称 A 与 B 不等势，记作 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$．

例如：对于集合 $A=\mathbf{N}^*$，$B=\left\{2n\middle|n\in\mathbf{N}^*\right\}$，存在一一对应关系 $y=2x\left(x\in A,y\in B\right)$，因此 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$．

（1）已知集合 $C=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=1\right\}$，$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right\}$，试判断 $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{D}}$ 是否成立？请说明理由；

$(\cos\theta,\sin\theta)$　$(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$　仿射

（2）证明：①$\overline{\overline{(0,1)}}=\overline{\overline{(-\infty,+\infty)}}$；(反比例)　$y=|\sin x|$

②$\overline{\overline{\mathbf{N}^*}}\neq\overline{\overline{\left\{x\middle|x\subseteq\mathbf{N}^*\right\}}}$．

解：(1) ✓（仿射拉伸变换）

(2) ① 反比例．eg：$f(x)=\tan\pi(x-\frac{1}{2})$

错误示范：$y=|\sin x|$（原因："1" 取到）

②（罗素悖论）

设 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，则存在一种映射 f $A\to B$（正难则反）

$D=\{x\in A\mid x\notin f(x)\}$，$D\subseteq A\Rightarrow D\in B$．$\exists a$，使 $f(a)=D$

若 $a\in D\Rightarrow a\notin f(a)=D\Rightarrow a\notin D$：矛盾！

故不存在．

19. 设正整数 $n\geq 3$，有穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $a_1+a_2+\text{L}+a_n=n$，定义积值 $S=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$.

（1）若 $n=3$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right\}$ 与数列 $\left\{\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{13}{6}\right\}$ 的 S 的值分别为 S_1，S_2.

①试比较 S_1 与 S_2 的大小关系；$S_1>S_2$

$\{\frac{1}{3},1,\frac{5}{3}\}$

②若数列 $\{a_n\}$ 的 S 满足 $\min\{S_1,S_2\}<S<\max\{S_1,S_2\}$，请写出一个满足条件的 $\{a_n\}$；

（2）若 $n=4$ 时，数列 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 存在 $i,j\in\{1,2,3,4\}$，使得 $a_i<1<a_j$，将 a_i，a_j 分别调整为 $a_i'=a_i+a_j-1$，$a_j'=1$，其它 2 个 $a_k(k\neq i,j)$，令 $a_k'=a_k$. 数列 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 调整前后的积值分别为 S,S'，写出 S,S' 的大小关系并给出证明；$S<S'$

（3）求 $S=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 的最大值，并确定 S 取最大值时 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所满足的条件，并进行证明. 幂均：$\leq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=1$.

19.

有点像解抽象函数

记 (2022清华强基)

若 $x\&(y\&z)=x\&y+z$，$x\&x=0$. 问 $2000\&2022$

解：① 当 $x=y=z$ 时：

$x\&(y\&z)=x\&(x\&x)=x\&0$

$=x\&x+x$

$=0+x$

$\Rightarrow x\&0=x$

② $y=z$ 时 $x\&(y\&y)=x\&y+y$

$\Rightarrow x-y=x\&y$ → 这样来

$\therefore ans=-2$.

(高一数学必修一重难点手册) doge.(可作T19素材)

学会用逻辑语言书写

若 $a,b\in A$ 且 $a\pm b\in A$，则称A为闭集合.

(1). A,B闭则是否 $A\cup B$ 一定闭(举反例)

(2). 若A,B闭，$A\subsetneq R$，$B\subsetneq R$，证 $(A\cup B)\subsetneq R$

证明 $A\cup B\neq R$

(2). ① $A\cup B\subseteq R$ 必成立，下证 $A\cup B\neq R$.

② 若 $A\cup B=R\Rightarrow$

$\exists\ a\in A$ 但 $a\notin B$

$\exists\ b\in B$ 但 $b\notin A$

考虑 $a+b\in A\cup B=R$.

若 $a+b$ 在A中，则b在A中，矛盾！

同理

∴ $a+b$ 不在A中，不在B中

但在 $A\cup B$ 中 ×

$\therefore A\cup B\neq R$

综上

$p \nmid x$. 则 $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

19.(17分)

离散对数在密码学中有重要的应用.设p是素数，集合$X=\{1,2,\cdots,p-1\}$，若$u,v\in X,m\in\mathbf{N}$，记$u\otimes v$为uv除以p的余数，$u^{m,\otimes}$为u^m除以p的余数；设$a\in X$，1，a，$a^{2,\otimes}$，…，$a^{p-2,\otimes}$两两不同，若$a^{n,\otimes}=b(n\in\{0,1,\cdots,p-2\})$，则称$n$是以$a$为底$b$的离散对数，记为$n=\log(p)_a b$. 剩余系

(1) 若$p=11$，$a=2$，求$a^{p-1,\otimes}$；

(2)对m_1，$m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，记$m_1\oplus m_2$为m_1+m_2除以$p-1$的余数(当m_1+m_2能被$p-1$整除时，$m_1\oplus m_2=0$).证明：$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$，其中$b,c\in X$；[余数的乘法]

(3) 已知$n=\log(p)_a b$.对$x\in X$，$k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，令$y_1=a^{k,\otimes}$，$y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$.证明：$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

解.(1) 即求 a^{p-1} 除以p的余数. $a=2$. $2^{10}\equiv 1 \pmod{11}$ $\longrightarrow$ 费马小定理.

(2) $b\otimes c$: bc模p的余.

先翻译. $\log(p)_a b=m$. 则 a^m 除p的余数为b $\Rightarrow a^m=kp+b$ (k, p为商) MD 估计大了

$\log(p)_a c=n$ 则 a^n除p 的余数 c. $\Rightarrow a^n=qp+c$

$\log p_a(b\otimes c)=d$. 则 a^d除以p的余数为 (bc除以p的余数) $\left[\frac{a^m\cdot a^n}{p}\right]=\left[\frac{bc}{p}\right]$ 是负的都不讲人话

相乘取余即可

首先.这个题的表述就是一个JB玩意.有现成的数学符号不用,一定要OLOOI,折磨请病.

表述.

设p为素数，$X=\{1,2,3\cdots p-1\}$. $m\in N$. $\rightarrow a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ 费一小.

$a\in X$，且a^0; a; a^2 a^3 … a^{p-2} 构成一个mod p的剩余系.

若$a^n\equiv b \pmod p$，则称 $n=\log(p)_a b$.

~~(2).对于 $m_1,m_2\in\{0,1,2,\cdots p-2\}$,~~ $\cancel{m_1+m_2=}$

(3). 已知. $a^n\equiv b \pmod p$.

$a^k\equiv y_1 \pmod p$

$b^k\equiv y_2' \pmod p$

$xy_2'\equiv y_2 \pmod p$.

MD.

(2) 记 $a^{n_1}=a^{n_1,\otimes}+m_1p$，$a^{n_2}=a^{n_2,\otimes}+m_2p$，$a^{n_1,\otimes}\times a^{n_2,\otimes}=a^{n_1,\otimes}\otimes a^{n_2,\otimes}+kp$，

其中 m_1，m_2，k 是整数，则

$$\begin{aligned}a^{n_1+n_2}&=a^{n_1,\otimes}\cdot a^{n_2,\otimes}+pm_1a^{n_2,\otimes}+pm_2a^{n_1,\otimes}+m_1m_2p^2\\&=a^{n_1,\otimes}\otimes a^{n_2,\otimes}+(m_1a^{n_2,\otimes}+m_2a^{n_1,\otimes}+m_1m_2p+k)p\end{aligned}$$

可知 $a^{n_1,\otimes}\otimes a^{n_2,\otimes}=a^{n_1+n_2,\otimes}$.

因为 1，a，$a^{2,\otimes}$，…，$a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，所以存在$i\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，

使得$a^{p-1,\otimes}=a^{i,\otimes}$，记$a^{p-1}=\lambda p+a^{p-1,\otimes}$，$a^{i}=\lambda p+a^{i,\otimes}$，$\lambda\in N$，

则$a^{p-1}-a^{i}=a^{i}(a^{p-1-i}-1)$可以被$p$整除，于是$a^{p-1-i}-1$可以被$p$整除，即$a^{p-1-i,\otimes}=1$.

若$i\neq 0$，因为$i\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，所以$p-1-i\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，$a^{p-1-i,\otimes}\neq 1$，矛盾，

因此$i=0$，$a^{p-1,\otimes}=1$. ……11 分

记$n=\log(p)_ab$，$m=\log(p)_ac$，$n+m=n\oplus m+l(p-1)$，其中l是整数，则

$$b\otimes c=a^{n,\otimes}\otimes a^{m,\otimes}=a^{n+m,\otimes}=a^{n\oplus m+l(p-1),\otimes}=a^{n\oplus m,\otimes}\otimes a^{l(p-1)\otimes}=a^{n\oplus m,\otimes},$$

即$\log(p)_a(b\otimes c)=n\oplus m=\log(p)_ab\oplus\log(p)_ac$. ………13 分

(3) 由题设和 (2) 的证明知：

$$y_2=x\otimes b^{k,\otimes}=x\otimes\overbrace{(b\otimes b\otimes\cdots\otimes b)}^{k}=x\otimes\overbrace{a^{n,\otimes}\otimes a^{n,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{n,\otimes}}^{k}=x\otimes\overbrace{a\otimes a\otimes\cdots\otimes a}^{nk},$$

$$y_1^{n(p-2),\otimes}=\overbrace{y_1\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_1}^{n(p-2)}=\overbrace{a^{k,\otimes}\otimes a^{k,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{k,\otimes}}^{n(p-2)}=\overbrace{a^{p-2,\otimes}\otimes a^{p-2,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{p-2,\otimes}}^{nk},$$

$$\begin{aligned}y_2\otimes y_1^{n(p-2,\otimes}&=x\otimes\overbrace{a\otimes a\otimes\cdots\otimes a}^{nk}\otimes\overbrace{a^{p-2,\otimes}\otimes a^{p-2,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{p-2,\otimes}}^{nk}\\&=x\otimes\overbrace{a^{p-1,\otimes}\otimes a^{p-1,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{p-1,\otimes}}^{nk}.\end{aligned}$$

由 (2) 的证明知 $a^{p-1,\otimes}=1$，所以 $y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}=x$. ………17 分

【解析】(网络流传解析)

(1)当$p=11$，$a=2$时，$a^{p-1,\otimes}=2^{10,\otimes}$，它表示$2^{10}$除以11的余数，

$2^{10}=1024=93\times 11+1$，余数为 1，$\therefore a^{p-1,\otimes}=1$.

(2)设$\log(p)_ab=m_1$，$\log(p)_ac=m_2$，

则a^{m_1}除以p的余数为b，a^{m_2}除以p的余数为c，

即存在自然数λ、μ，使$a^{m_1}=\lambda p+b$，$a^{m_2}=\mu p+c$成立，其中m_1，$m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$.

问题转化为证明：$\log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2$.

因为$\dfrac{a^{m_1+m_2}}{p}=\dfrac{a^{m_1}\cdot a^{m_2}}{p}=\dfrac{(\lambda p+b)(\mu p+c)}{p}=\dfrac{\lambda\mu p^2+(\lambda c+\mu b)p+bc}{p}$.

所以$a^{m_1+m_2}$除以p的余数为bc除以p的余数，即为$b\otimes c$，

$\therefore\log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2=\log(p)_ab\oplus\log(p)_ac$.

(3)若m除以n的余数为b，可记为$m\equiv b\pmod n$，

由 $n=\log(p)_a b$， $\therefore a^n \equiv b\,(\mathrm{mod}\ p)$，

$\therefore y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv y_2 \cdot y_1^{n(p-2)}(\mathrm{mod}\ p) \equiv x \cdot b^k \cdot (a^k)^{n(p-2)}(\mathrm{mod}\ p)$

$= xa^{nk} \cdot a^{nk(p-2)}(\mathrm{mod}\ p) = x \cdot a^{nk(p-1)}(\mathrm{mod}\ p) = x(a^{p-1})^{nk}(\mathrm{mod}\ p)$（$\because a^{p-1}$ 除以 p 的余数为 1）

$\equiv x \cdot 1^{nk}(\mathrm{mod}\ p) \equiv x(\mathrm{mod}\ p)$

$\because y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes} \in X$， $x \in X$， $\therefore x = y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

借助费马小定理精彩秒杀：

（2）令$n=\log(p)_a(b\otimes c)$， $n_1=\log(p)_a b$， $n_2=\log(p)_a c$，

则$a^{n_1}=pm_1+b$， $a^{n_2}=pm_2+c$，其中m_1， $m_2 \in \mathbf{N}$，

$\therefore a^{n_1+n_2} \equiv bc\,(\mathrm{mod}\ p)$，而$a^n \equiv b\otimes c\,(\mathrm{mod}\ p) \equiv bc\,(\mathrm{mod}\ p)$， $\therefore a^n \equiv a^{n_1+n_2}(\mathrm{mod}\ p)$，

由费马定理， $a^{s(p-1)+t} \equiv a^t(\mathrm{mod}\ p)$，则$n=n_1+n_2$或$n=(n_1+n_2)+p-1$，

则$n=n_1\otimes n_2$， $\therefore \log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b \oplus \log(p)_a c$.

（3）$\because n=\log(p)_a b$， $\therefore a^n \equiv b\,(\mathrm{mod}\ p)$，且 $y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv y_2 \cdot y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv x\,(\mathrm{mod}\ p)$，

$\because y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes} \in X$， $x \in X$， $\therefore x = y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

例2、$A=\{x \mid x^2-4mx+2m+6=0\}$，$B=\{x \mid x<0\}$.

$A\cap B=A$，问 m.

$\Downarrow$ (这是直接)

① $A\neq\emptyset$ ($m\geq\frac{3}{2}$ 或 $m\leq -1$)

解、$A\subseteq B$. $\Rightarrow$ $\begin{cases}2m+6>0\\4m<0\end{cases}$ $\Rightarrow -3<m<0$.

$\Rightarrow -3<m\leq -1$

② $A=\emptyset$：$16m^2-4(2m+6)<0$.

$16m^2-8m-24<0$

$2m^2-m-3<0$

$\begin{matrix}2m & -3\\ m & 1\end{matrix}$

$\Rightarrow -1<m<\frac{3}{2}$.

综上，$-3<m<\frac{3}{2}$.

例3、$A=\{a_1, a_2 \dots a_k\}$ $(k\geq 2)$，$a_i\in\mathbb{Z}$ $(i=1,2,\dots k)$

书逢 由A中元素构成两个相应的集合，$S=\{(a,b) \mid a\in A, b\in A, a+b\in A\}$

$T=\{(a,b) \mid a\in A, b\in A, a-b\in A\}$，$(a,b)$：有序对.

举例 $\{1,2,3\}$ $\downarrow$ $S=\{(1,2)\ (2,1), (1,1)\}$

S，T中元素个数分别为m，n

若$\forall a\in A$，总有$-a\notin A$，则称A具有性质P.

$\{(-1,3)\ (3,-1)\}$

$\parallel$

(1). $\{0,1,2,3\}$，$\{-1,2,3\}$ 有无P? 对有P的集合写出其S，$T=\{(2,-1), (2,3)\}$

(2). $\forall$有P的集合A，证明 $n\leq\frac{k(k-1)}{2}=C_k^2$，即证"若$(a,b)\in T$，则$(b,a)\notin T$"

$\hookrightarrow$ 无序

$\downarrow$

k个不同元素选 $\rightarrow$ 再说一句：(a,a) $\downarrow$ 0.

(3). m，n谁大?

$m=n$.（如 来源）

(3). $\forall(a,b)\in S$，则$(b,a)\in S$.

$\Rightarrow a+b\in A \Rightarrow (a+b, a)\in T$. $\xrightarrow{\text{对应}}$ $\Rightarrow m\leq n$ 漏洞 $\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\cdot\end{pmatrix}$，下证不同元素对应的也不同

$(a+b, b)\in T$

再$\forall$. $m\geq n$.

若$(a,b)\neq(c,d)$

$\Rightarrow (a+b,a)\neq(c+d,c)$

$\hookrightarrow$ 反证法：$\begin{cases}a+b=c+d\\a=c\end{cases}$ $\Rightarrow b=d$ ×

Campus

2022

北京转移

21. 已知Q为有穷整数数列，给定正整数m，若∀$n\in\{1,2,\dots,m\}$，

在Q中∃ $a_i, a_{i+1}, \dots a_{i+j}$ $(j\geq 0)$，使 $a_i+a_{i+1}+\dots+a_{i+j}=n$，

称Q为m-连续可表数列　只能含顺序相加

(1). ①2,1,4是否为5-可表？是否为6-可表？

(2). 若①$a_1, a_2 \dots a_k$为8-可表，求证$k_{min}=4$ → 转证 $k=4$ ✓

(3). 若①$a_1, a_2 \dots a_k$为20-可表，且$a_1+a_2+\dots+a_k<20$，证$k\geq 7$.

不好证 $k=7$ ✓

↓ $k\geq 7 \Leftrightarrow k<7$ 不成立

解 (1). 2,1,4 → 2, 1, 4, 3, 5, 7, 5可表，6不可表.

(2) $k=1$：1个 ×

$k=2$：3个 ×

$k=3$：6个 ×

$k=4$：10个 ✓，构造：~~4~~，2,1,4：~~7,3,5,8,7,7,3,5,5,2,1,4~~

6, 8, 9, 13, 3, 5, 7, 1, 2, 4

(3). 数论融合大题.

①. 若 $k\leq 6$，显然，总个数上，只有6成立.

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6

a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, a_5+a_6

$a_1+a_2+a_3$, $a_2+a_3+a_4$, $a_3+a_4+a_5$, $a_4+a_5+a_6$

$a_1+a_2+a_3+a_4$, $a_2+a_3+a_4+a_5$, $a_3+a_4+a_5+a_6$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$, $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$.

①考虑：取遍1~20，而 $a_1+a_2+\dots+a_k<20$，故必有负.

一考虑负数个数：上21个数中，若存在负，则只可有一个.（不占1~20位置）

于是只存在1个负数

二考虑负数位置：

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

①.中间，eg：取 $a_2<0$.

考虑取到20的情形 ①包括a_2，而不为全部，则$\sum_{i=1}^{6} a_i>20$ 1%，矛盾

②不包括a_2，1总到 $a_1+a_2>20$，则也必∃一种方式使$\sum>20$，

故负数不可能为a_2, a_3 a_4, a_5.

由对称性，不妨记 $a_1<0$，$a_2,\dots,a_6>0$.

则上述21个数除 a_1 外，

$max=20=a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$.

从整体考虑：将20个数相加.

$1+2+\dots+20=210=5a_1+10a_2+12a_3+12a_4+10a_5+6a_6$

故 a_1 为负偶数.

下提 $a_2+\dots+a_6$

$RHS=5a_1+120+4a_2+6a_3+6a_4+4a_5$

$\therefore 90=5a_1+4(a_2+a_3+a_4+a_5)+2(a_3+a_4)$

放缩. $=5a_1+4\times(20-a_6)+2(a_3+a_4)$

$\leq 5a_1+4\times19+2\times17$.

要小于1放到不等，此处会放成1)

或1就为1,2,3.

$90\leq 5a_1+34+76$

$5a_1\geq-20$

$a_1\geq-4$.

故：$a_1=-2$；

手动 k=1 时都不满足 ∴ $k\geq7$.

$-2,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$.

20.

只有一个 a_1 1个 -2.

$\therefore \sum_{i=2}^{6}a_i=18$，寻找19.

19：不包含 a_1 ~~且必为半个数~~ 且必为4数.

$-2,\ a_2,\ 19$.

1

$-1\times$

$\therefore$ 必为 $a_2+a_3+a_4+a_5=19$.

$\therefore a_6=1$，有 ≥ 18.

$-2,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ 1$

$\therefore a_3+a_4=12$

$a_2+a_5=7$：1,6，2,5，3,4，不

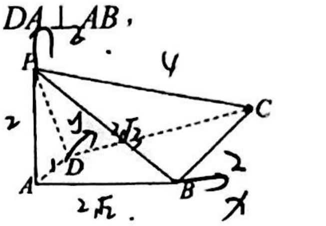
换个试，矛

经过 F_1 的直线 $y=kx+m$ 与 C 交于 A,B 两点，P 为 xOy 平面下方一点，若 $P-ABO$ 为垂棱四面体，则其外接球表面积S是 k 的函数 $S(k)$

（1）$S(k)$ 的定义域是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；（2）$S(k)$ 的最小值是 $\frac{5}{2}\pi$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，其中 $DA\perp AB$，$AD\,//\,BC$．$PA=2AD=BC=2, AB=2\sqrt{2}$.



（1）若平面 $ABCD$ 内有一经过点 C 的曲线 E，该曲线上的任一动点 Q 都满足 PQ 与 AD 所成角的大小恰等于 PC 与 AD 所成角.试判断曲线 E 的形状并说明理由；

（2）在平面 $ABCD$ 内，设点 Q 是（1）中的曲线 E 在直角梯形 $ABCD$ 内部（包括边界）的一段曲线 CG 上的动点，其中 G 为曲线 E 和 DC 的交点,以 B 为圆心，BQ 为半径的圆分别与梯形的边 AB、BC 交于 M、N 两点.当 Q 点在曲线段 GC 上运动时，求四面体 $P-BMN$ 体积的取值范围.

$\frac{t^2}{4}-2>\frac{1}{4}\quad t^2-8>1\quad t^2>8$

16. 已知 A,B,C 为锐角三角形的三个内角，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.

（1）求证：$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$；

（2）若 $b^2-2c\sin B+c^2=4$，且 $a=2$，求实数 t 的取值范围，使得对任意实数 x 和任意角 B，恒有

$a^2=b^2+c^2-2c\cdot b\cos B$

$$(x+3+2\sin B\cos B)^2+(x+t\sin B+t\cos B)^2>\frac{1}{32}；$$

$x+(\sin B+\cos B)^2$

$\sqrt{\frac{1}{32}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

（3）求 $14\tan A+7\tan B+4\tan C$ 的最小值.

$14\tan A+7\tan B+4\tan C$

$\tan x=\frac{3}{4}$ $\quad \frac{\frac{3}{2}\times 16}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$

17. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，若 A，B 两点在曲线 $y=f(x)$ 上，C，D 两点在曲线 $y=g(x)$ 上，以 A，B，C，D 四点为顶点构成的四边形为矩形，且该矩形的其中一条边与直线 $y=x$ 垂直，则我们称这个矩形为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的"关联矩形"：

（1）若函数 $y=f(x)$ 为幂函数，且点 $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 在 $y=f(x)$ 图象上，设 $F(x)=f(x)-g(x)$.

①求曲线 $y=F(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{4},F\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 处的切线方程；②求函数 $F(x)$ 的极值点；

（2）若函数 $f(x)=\ln x$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的"关联矩形"是正方形，记该"关联矩形"的面积为 S.证明：$S>2\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\right)^2$.（参考数据：$\sqrt{e}-1-\ln 2<0$）

~~题错的 应该是小于~~