No.

Date

排组例题整理

12503 宁波十校) T14 (一题多理解)

生活中经常会统计一列数据中出现不同数据的个数. 设 $c_k \in \{1,2,3,4,5\}$，对于有序数组 (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)，记 $R(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$ 为 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 中所包含的不同整数的个数，比如：$R(1,1,2,2,2)=2$， $R(2,1,3,4,4)=4$． 当 (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5) 取遍所有的 5^5 个有序数组时，$R(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ 的总和为__▲__

5^5 → 3125，可以只算其中4个.

审题注意点：① $(1,1,1,1,1)=1$ not 0. ② 看种数.

理解视角一：分类计数结合容斥原理

另一个方法 → 整体抽象思维 → 有点像1~PP → 设入集合A,B,C位 → $A \subsetneq B \subsetneq C$

1：5种.

2：$C_5^2(2^5-2)$ → 1,2乱排；→ 例：就取1,2. 1,1,1,1,1，2,2,2,2,2

1 2 2 2 2
1 1 2 2 2
1 1 1 2 2
1 1 1 1 2

3：$C_5^3(3^5-C_3^2\cdot 2^5+3)$

4：$C_5^4(4^5-C_4^3\cdot 3^5+C_4^2\cdot 2^5-C_4^1)$

5：$C_5^5(5^5-C_5^4 4^5+C_5^3\cdot 3^5-C_5^2\cdot 2^5+C_5^1\cdot 1^5)$

理解视角二：分类计数结合排列组合数

1：5种

2 $C_5^2\times$ (对4种情型一个个列)

3 $C_5^3\times$ ，求和.

4 $C_5^4\times$

5 $A_5^5=120$种.

理解视角三：考虑某个元素的贡献

$$5\sum_{k=1}^{5}C_5^k 4^{5-k}=5[C_5^1\cdot 4^4+C_5^2\cdot 4^3+C_5^3\cdot 4^2+C_5^4\cdot 4+C_5^5\cdot 1]=5(5^5-4^5)=10505$$

1 1 2 2 3：1贡献"1"，2贡献"1"，3贡献"1". 考虑有1的，一定贡献1. 5^5-4^5（所有，没1的）.

总体乘5倍

理解视角四：考虑均值

$(c_1,c_2,c_3\cdots c_{n-1},c_n)$ 中不同整数的个数为 X_n

$$E(X_{n+1})=E(X_n)+\frac{5-E(X_n)}{5}=\frac{4}{5}E(X_n)+1，其中 E(X_1)=1.$$

$$\Rightarrow E(X_n)=5-4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow E(X_5)=5-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^4=5-\frac{4^5}{5^4}=\frac{5^5-4^5}{5^4}.$$ 再乘3125即可.

从 $E(X_n)$ 之外的事总，每个选入的概率为1/5.

KOKUYO

No.
Date

球装箱问题(易错)

例：4球装两箱，问放法

① 球异箱异（均，下同） $4\times4=16$

② 球异箱同 $4\times4\div2=8$

③ 球同箱异 (0 4) (1 3) (2 2) (3 1) (4 0)，$x+y=4$ 的有序自然数解，5

④ 球同箱同 (0 4) (1 3) (2 2) $x+y=4$ 的无序自然数解，3

250522 校模 T4 hhh 全班就你一个错了)

2个小球随机投入编号为1,2,3,4的4个盒子中，每个盒子容纳的小球个数无restrain). 记1号box中小球个数为 ξ，问 $E(\xi)$. (BW法. $np: 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$)

错答：5/16.

错因：$\xi=2: \frac{1}{16}$ → 默认了球异箱异.

$\xi=1$: 定1移3: $\frac{3}{16}\times\frac{6}{16}$. $\Rightarrow E(\xi)=\frac{1}{2}$

$\xi=0$: $\frac{12}{16}\times\frac{9}{16}$

若考虑球同

总数：$4+C_4^2=10$ 种. $\xi=2: \frac{1}{10}$. $\xi=1: \frac{3}{10}$ ✓ $\frac{1}{2}$.

错排问题.

母题：n封信，n个套，编号，全错的排法

考虑：记全部排法为S，$|S|=n!$，第i封信恰入第i个套的所有方法：A_i.

即求 $|C_S A_1 \cap C_S A_2 \cap C_S A_3 \cap \cdots \cap C_S A_n|$.　（容斥原理的运用）

$|A_i| = (n-1)!$，$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

则由筛法公式，原式 $= n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! + \cdots + (-1)^n C_n^n \cdot 0!$

$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$

↳ "集合 X{1,2,...n} 没有任何不动点的置换的个数"

$$* \ |C_S A_1 \cap C_S A_2 \cap \cdots \cap C_S A_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n|$$

6. [2024·义乌中学模拟] 将编号为 1,2,3,4 的四个小球随机放入编号为 1,2,3,4 的四个盒子中，每个盒子中放一个小球，球的编号与盒子的编号相同时叫做放对了，否则叫做放错了. 设放对的个数为 X，则 X 的期望为 __1__.

概统

1. $X\sim\{0,1,2\}$, $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $E(X)=1$, $D(X)=$ ______ $\frac{1}{2}$

* 算 $E(X)$ 时 0 可以没用，但 $D(X)$ 时 0 会有用.

2. 注意条件概率先后与概率，事件书写

3. $P(B|A)=P(B)\Longleftrightarrow A,B$ 独立 $(P(AB)=P(A)P(B))$

4. 11. 同时抛掷两枚质地均匀的骰子两次，记事件 $A=$ "两枚骰子朝上的点数之积均为偶数"，事件 $B=$ "两枚骰子朝上的点数之和均为奇数"，则 $P(B|A)=$ ______ $2/3$ $4/9$ $\frac{1}{2}$

2枚2次

5. 11. 某人共有三发子弹，他射击一次命中目标的概率是 $\frac{2}{3}$，击中目标后停止射击，若射击次数 X 为随机变量，则 $E(X)=$ ______. 2

$B\sim np$.

Q、如果有n发子弹，$E(X)$ 3 ?

427

几何分布(无数发的)

$X=1$: $P=\frac{2}{3}$

$X=2$: $P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$

$X=3$: $P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$

$X=n$: $P=(\frac{1}{3})^{n-1}\times\frac{2}{3}$ $\Rightarrow\sum\frac{2}{3}n\times(\frac{1}{3})^{n-1}$. 错位相减

6. 4. 在医学、生物学试验中，经常以果蝇作为试验对象，一个关有 6 只果蝇的笼子里，不慎混入了两只苍蝇（此时笼内共有 8 只蝇子：6 只果蝇和 2 只苍蝇），只好把笼子打开一个小孔，让蝇子一只一只地往外飞，直到两只苍蝇都飞出，再关闭小孔. 记事件 A_k 表示"第 k 只飞出笼的是苍蝇"，$k=1,2,\cdots,8$，则 $P(A_5|A_2)$ 为 （ ）

1 2 3 4 5

苍 苍 果

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{2}{5}$

B C

平均数思想

a, b 中至少1个比 c 小

方式1：反证 $a \geq c, b \geq c \Rightarrow$ 矛盾

方式2：$a+b<2c$ / $ab<c^2$.

例：x, y 正实，$\max\{x, 2y, \frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\}$ min（含不等式的平均值）

设 $\max\{x, 2y, \frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\} \triangleq N$.

则：
$$\left.\begin{array}{l} x \leq N \\ 2y \leq N \\ \frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2} \leq N \end{array}\right\} \Rightarrow 2xy\left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \leq N^3$$

$$N^3 \geq 2xy\left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \geq 2xy \cdot 2\sqrt{\frac{4}{x^2y^2}} = 4xy \cdot \frac{2}{xy} = 8 \Rightarrow N \geq 2.$$

$x=2, y=1$ 取等.

例：$a=\sin x\cos y$，$b=\sin y\cos z$，$c=\sin z\cos x$. 比较 $\frac{1}{2}$，大小关系，个数.

core：$abc=(\frac{1}{2})^3\sin 2x\sin 2y\sin 2z \leq \frac{1}{8}$ 即可比.

二项分布均值、方差的证明思考

$X\sim B(n,p)$. 证明 $E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$

(※对于E(X)这类 熟悉 法论的形式, 即 $\sum_{i=0}^{n} kx_k$, 要看得懂

方法I: $(1-p+p)^n = C_n^0(1-p)^n + C_n^1(1-p)^{n-1}p + C_n^2(1-p)^{n-2}p^2+\dots+C_n^np^n$.

联系 $(x+1)^n=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ 类别类似的形式, 对x求导, 再赋 $x=1$.

但原式没有x, 更不知道怎么赋值! (在操作时发现p不保次数)

于是我双管齐下.

$(1-p+px)^n = C_n^0(1-p)^n + C_n^1(1-p)^{n-1}px + C_n^2(1-p)^{n-2}(px)^2+\dots+C_n^n(px)^n$

对x求导: $pn(1-p+px)^{n-1} = 0 + C_n^1(1-p)^{n-1}p + 2C_n^2(1-p)^{n-2}p^2x+\dots+nC_n^np^nx^{n-1}$ ……①

赋 $x=1$: $np=E(X)$.

方法II: 利用组合恒等式.

$\sum = \sum k\cdot C_n^k(1-p)^{n-k}p^k$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ n个人, k个代表, 1个队长

想法: $C_k^1C_n^k = C_n^1C_{n-1}^{k-1}$: 二次分类 第2次.

选的 k个 代表　队长　队长也是代表.

$\Rightarrow$

$\sum=\sum nC_{n-1}^{k-1}(1-p)^{n-k}p^k$;

简记 $q=1-p$.

$\sum=\sum nC_{n-1}^{k-1}q^{n-k}p^k$, 为了调整成看得懂的形式: 调次数.

$=np\sum C_{n-1}^{k-1}q^{n-k}p^{k-1}=np(p+q)^{n-1}=np$.

方差的证法

分布列 X　0,　1　2　3　4　……　n

P　$C_n^0(1-p)^n$　$C_n^1p(1-p)^{n-1}$　……　$C_n^np^n$.

$D(X)=C_n^0(1-p)^n(0-np)^2+C_n^1p(1-p)^{n-1}(1-np)^2+\dots+C_n^np^n(n-np)^2$

~~$=n^2p^2(C_n^0(1-p)^n+C_n^1p(1-p)^{n-1}+\dots+C_n^np^n)$~~

~~$-2np^2$~~

$+0\cdot C_n^0(1-p)^n$ ~~[illegible]~~

$=n^2p^2\cdot 1-2n^2p^2+0^2C_n^0(1-p)^n+1^2C_n^1p(1-p)^{n-1}+\dots+n^2C_n^np^n$

对①式两边同乘x 再求导.

$npx(1-p+px)^{n-1}=0x+C_n^1(1-p)^{n-1}px+2C_n^2(1-p)^{n-2}p^2x^2+\dots+nC_n^np^nx^n$

求 $=$ $npx(n-1)p(px+1-p)$

$+np(1-p+px)^{n-1}$

$\Rightarrow np(1-p)$.

$x=1$: LHS $=n(n-1)p^2+np=n^2p^2-np^2+np$

! 一道函数的易错题!

3. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若函数 $f(x)=P(x\leqslant X\leqslant x+1)$ 为偶函数，则 $\mu=$ （ B ）

偶函数：$f(x)=f(-x)$

A. $-\frac{1}{2}$ 即 $P(x\le X\le x+1)$ $=P(-x-1\le X\le -x)$

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

$\Rightarrow P(x\le X\le x+1)=P(-x\le X\le -x+1) \Rightarrow \mu=\frac{1}{2}$

数学XB III整理.

x^2:有理项→x为整数(次数)

1. 残差:观测值减预测值(容易减反)

2. 二项式系数:C_n^k.

……的系数,除3x.

$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$　　$(a+b)^n$.

3. $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^n=2^n$ (代值运算,求导,组合恒等式,Van Delmons恒等)

$\sum_{k=m}^{n} C_{M-1}^{k-1}C_{N-M}^{n-k}=C_{N-1}^{n-1}$ (范德蒙)

4. $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$:"除2个A"

↓

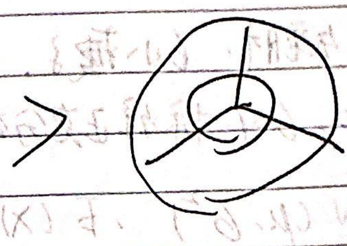
A下B的概率.

∴$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

全概率. $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)=P(BA_1)+P(BA_2)+\dots+P(BA_n)$

$=P(B)$

BYS: $P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{全概率}$



5.

X	0	1
P	p	1-p

两点分布/0-1分布

"最大项的系数"

"系数最大的项"

6. $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$, $\sqrt{D(X)}=\sigma(X)$

$=E(X^2)-E^2(X)$

7. 二项分布

$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ 的阶乘表示

* 只含2个可能结果的试验:伯努利试验.

独立重复进行n次:n重伯努利试验

* n重伯努利试验中,设试验中事件A发生的概率为p $(0<p<1)$

X:A发生的次数.

X的分布列: $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

X服从二项分布 $X\sim B(n,p) \Rightarrow E(X)=np,\ D(X)=np(1-p)$

* 高尔顿板:"共撞击n次",每一次撞击独立,变数为"向右落下的次数"

$(a+b)^n$: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$.

7. 超几何分布

一批产品共有N件，M件次品，N件产品中随机抽出n件（不放回）。

X表示n件中的次品数。

X分布列 $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，　记 $p=\frac{M}{N}$（次品率）。$E(X)=np$.

~~$D(X)=np(1-p)$~~

$\left(D(X)=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}\right)$ 吗.

8. 正态分布.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

① $\int=1$.

② σ大矮胖，σ小瘦子。　$x=\mu$对称轴，峰值为 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

③ $\mu=0$，$\sigma=1$：标准正态分布。

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$

$P(\mu-k\sigma\le X\le\mu+k\sigma)$ 只与k有关