数列放缩手法

例：$a_n=\frac{1}{3^n-1}$，求证 $S_n<\frac{3}{4}$

手法零、保留项

手法一：裂项放缩、上下同乘通项，配成裂项（可能要留）

$$\frac{1}{3^n-1}=\frac{3^{n+1}-1}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}<\frac{3^{n+1}}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right]$$

(补例) $$\frac{1}{9^n-(3n+1)}=\frac{9^{n+1}-(3n+4)}{[9^n-(3n+1)][9^{n+1}-(3n+4)]}=\frac{9^{n+1}-(3n+4)}{8\times 9^n-3}\left[\frac{1}{9^n-(3n+1)}-\frac{1}{9^{n+1}-(3n+4)}\right]$$

$$\le\frac{9}{8}\left[\quad\cdots\quad\right]$$

留

手法二：糖水不等式

$$a_n=\frac{1}{3^n-1}<\frac{2}{3^n}$$

手法三、等比压缩

手法四，主导项

$$a_n=\frac{1}{3^n-1}=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^n}.$$

数列的单题series (2503济南一模)

已知递增数列$\{a_n\}$各项正整，$a_{a_n}=3n$.

A: $a_{a_1}=3$　B. $a_n>n$　C: $a_5=6$　D $a_{2025}=81a_{25}$

(从做题角度应该猜ABD)

和选项设计上

1.原题呈现 (from Tiger)

↗单调性用来夹　↗套　link下面(坑)

$f: N^+\to N^+$, 且$\forall n\in N^*$, $f(n+1)>f(n)$, $f(f(n))=3n$, 问$f(2023)$值. [填坑法]

很强的条件

解.(先尝试)

$f(f(1))=3$, $f(f(2))=6$, $f(f(3))=9$, $f(f(4))=12$

① $f(1)=?$

1? ⇒ $f(f(1))=f(1)=1\neq 3$ ✗ ⇒ $f(1)\geq 2$, 而 $f(f(1))=3\geq f(2)>f(1)$

⇒ $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=f(f(2))=6$.

② 接着尝试，一边套一边填坑

$f(6)=f(f(3))=9$, ⇒ 4,5 被夹出7,8. $f(7)=f(f(4))=12$, $f(8)=15$, $f(9)=18$, $f(12)=21$

⇓ $f(10)=19$, $f(11)=20$

归纳: 填坑为了下面的代值 (可以一直迭下去)

(对数轴上的点分段)

③归: $f(f(1))=3$, $f(f(3))=9$, … $f(f(3^k))=3^{k+1}$ ⇒ $f(3^k)=3\cdot f(3^{k-1})$

$=\dots=3^k\cdot f(1)$

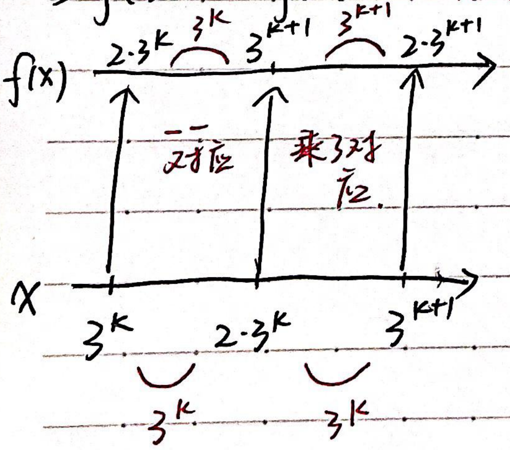
$=2\cdot 3^k$

(类似Cauchy方程)

$f(f(n))=3n$, 令 $n=f(n)$

⇒ $f(3n)=3f(n)$ ⟶ 先得到乘3(3^k)的值, 再往前填

$f(2\times 3^k)=f(f(3^k))=3^{k+1}$



一、公差，首项，封闭.

等差$\{a_n\}$ $a_1=1$，$d=\sqrt{2}$，证a_n中不存在三项成等比.

证明：$a_m=1+\sqrt{2}(m-1)$，$a_n=1+\sqrt{2}(n-1)$，$a_k=1+\sqrt{2}(k-1)$.

$a_m^2=a_n\cdot a_k \Rightarrow 2(m-1)^2-2(n-1)(k-1)=\sqrt{2}\underbrace{(n+k-2m)}_{\text{等差中项}} \Rightarrow 0=0$.

$\Rightarrow k=n$ ×

二、均值不等式.

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$正数列，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ $n\in N^*$

(1) 设$b_{n+1}=1+\frac{b_n}{a_n}$，证$\{(\frac{b_n}{a_n})^2\}$等差

(2) 设$b_{n+1}=\sqrt{2}\cdot\frac{b_n}{a_n}$，且$\{a_n\}$等比，求$a_1$，$b_1$值 → 恰成立问题.

(1) 形式. $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{a_n} \Rightarrow \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\sqrt{\dfrac{a_n^2+b_n^2}{a_n}}=\sqrt{1+\dfrac{b_n^2}{a_n^2}}$ 即证.

(2) 均不：

$\dfrac{a_n+b_n}{2}\le\sqrt{\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}} \Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\in(1,\sqrt{2}) \Rightarrow$ 等比中有界. $q=1$.

→ 只能定值，取等 $\Rightarrow a_n=\sqrt{2}$.

$\Rightarrow b_n$常数列. $\therefore b_n=\sqrt{2}$.

三、关于等比有界的说明

(2505核模T6) $\{a_n\}\to S_n$. 若$\exists M>0$，使$\forall n\in N^*$，$|S_n|<M$. 则称该数列为"和有界". 已知$\{a_n\}$等比，则"$|q|<1$"是$\{a_n\}$和有界的 充不必.

(反例)：1，-1，1，-1 摆动

(详)：$q>1$ ×

$q=1$ $\{1\}$

$\boxed{\text{分讨正面}}$ $0<q<1$：$0<q^n<q<1$ ；$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}, & q\ne1\\ na_1, & q=1\end{cases}$

$q=0$ ×

$-1<q<0$；$-1<q^n<1$

$q=-1$ ✓

$q<-1$：$\to-\infty$.

(不要写若…只需要…)

No.

Date

四：填坑①：天一齐鲁三联T19

有穷数列 $\{b_n\}$ m 项，$b_i \cdot b_{m+1-i} = a$（$a \neq 0$，a 常，$i = 1,2,3 \ldots m$）. a 为公共积

若 $a=1$，m 奇，且 $0 < b_i < b_{i+1}$（单调 & 有界）

$\forall b_i, b_j$，$(i, j \in [\frac{m+1}{2}, m])$，都存在正整数 $u \in [1, m]$，使得 $\frac{b_j}{b_i} = b_u$.

后面一半

证：$\{b_n\}$ 等比

证明．设 $\frac{m+1}{2} = k$（$m = 2k-1$）．　$u \in [1, 2k-1]$．$b_k = 1$.

$b_k, b_{k+1}, b_{k+2} \ldots b_{2k-1}$.

$b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{k-1} < b_k = 1 < b_{k+1} < b_{k+2} < \ldots < b_{2k-1}$.

考虑．$1 < \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} < \frac{b_{k+3}}{b_{k+1}} < \ldots < \frac{b_{2k-1}}{b_{k+1}} < b_{2k-1}$.（一一对应）

$\frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = b_{k+1}$，$\frac{b_{k+3}}{b_{k+1}} = b_{k+2}$，$\frac{b_{2k-1}}{b_{k+1}} = b_{2k-3}$，$b_{2k-1} = b_{2k-1}$

$\Rightarrow 1, q, q^2, q^3 \ldots \Rightarrow$ 右侧等比．左侧同理．

五：填坑（2020 北京 T21）

$\{a_n\}$ 无穷．性质Ⅰ：对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_i, a_j（$i > j$），都存在一项 a_m 使 $\frac{a_i^2}{a_j} = a_m$.

性质Ⅱ：对于 $\{a_n\}$ 中的任意项 a_n（$n \geq 3$），$\{a_n\}$ 中都存在两项 a_k, a_l（$k > l$）使 $a_n = \frac{a_k^2}{a_l}$.

若 a_n 且同时有性质Ⅰ，Ⅱ，则证 a_n 等比 / 存在性与可表性推全重性）（Cauchy 方程式题）

①证同号．不妨设全正．反证：假设

$N_0 = \max\{n \mid a_n < 0\}$（$a_n \neq 0$）

若 $a_1 < 0 < a_2 < a_3 \ldots$，则 ~~[illegible]~~.

$\frac{a_2^2}{a_1} = a_{m_1}$，$\frac{a_3^2}{a_1} = a_{m_2} \Rightarrow a_2 > a_3$（单调性）

若 $N_0 \geq 2$：$\exists a_m = \frac{a_{N_0}^2}{a_1} < 0$．则 $m \leq N_0$

而 $a_m = \frac{a_{N_0}^2}{a_1} > \frac{a_{N_0}^2}{a_{N_0}} = a_{N_0} \Rightarrow m > N_0$ 矛盾

所以 N_0 不存在：$\Rightarrow$ 数列恒正 or 恒负

②归纳奠基：证 $a_3 = \frac{a_2^2}{a_1}$．不妨全正

性质2：$n=3$：$a_3 = \frac{a_k^2}{a_l} = a_k \cdot \frac{a_k}{a_l} > a_k$

~~$\Rightarrow k=2, l=1$~~（单调性）

③归纳：假设 $\{a_n\}$ 前 k 项等比（$k \geq 3$）　第二数归

$a_s = a_1 q^{s-1}$（$1 \leq s \leq k$）　是 $k+1$ 与 k

$a_1 > 0$，$q > 1$（$a_1 < 0$，$0 < q < 1$ 类似）

特殊到一般

Ⅱ：$\exists s > t$ 使 $a_{k+1} = \frac{a_s^2}{a_t} > a_s \Rightarrow$

$k+1 > s > t$.

$a_{k+1} = \frac{a_s^2}{a_t} = a_1 q^{2s-t-1} > a_k = a_1 q^{k-1}$

Ⅰ：$\exists a_m = \boxed{\frac{a_k^2}{a_{k-1}}} = a_1 q^k > a_k$ 且 $a_m = a_1 q^k \geq a_{k+1}$

这个设计难　找突破口．

单增：$\geq$

离散夹逼

$\Rightarrow a_1 q^k \geq a_1 q^{2s-t-1} > a_1 q^{k-1}$

$\Rightarrow k \geq 2s-t+1 > k-1 \Rightarrow$（整数）$k = 2s-t+1$

$\Rightarrow a_{k+1} = a_1 q^k \Rightarrow a_n$ 等比

Campus

附：(2020 北京 T21 一个更合理的写法)

$a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$. $(a_2=a_1q,\ a_3=a_1q^2)$

下证 $a_4=a_1q^3$.

用邻项去逼

I：$\exists a_m$ 使 $\frac{a_3^2}{a_2}=a_1q^3$ → 那么这到底是哪一项呢？

若 $a_4\neq a_1q^3$，则 $a_4<a_1q^3$

性质II：$k<4$： $k=3, l=2 \Rightarrow a_4=a_1q^3$ ×

$k=3, l=1$：$a_4=a_1q^4>a_1q^3$ ×

$k=2, l=1 \rightarrow a_4=a_1q^2=a_3$ × $\Rightarrow a_4=a_1q^3$

再来：$\exists a_m$ 使 $\frac{a_4^2}{a_3}=a_1q^4$，$k<5$. 类似做法.

须项向下推：用数归写

数列处理手段,差分量化(换元)

无数转译

前2项平均数

(25523 YCDL)

设下标范围

$\{a_n\}$,$(1\le n\le 11)$ 满足:$\forall n\in\{2,3,4\dots 10\}$ 都有 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ 或 $2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$.

$a_1=\frac{3}{2}$, $a_2=2$, $a_9>0$. $a_{10}=0$ 问 a_{11} max.

link: 设 $a_{n+1}-a_n=d_n$.

$a_2=a_1+d_1$, $a_3=a_2+d_2\dots$ $a_{11}=a_{10}+d_{10}$

$\Rightarrow a_{10}=a_1+d_1+d_2+\dots+d_{10}$.

[换元法量化 d_n]: $d_n=d_{n-1}$ 或 $d_n=-\frac{1}{2}d_{n-1}$

$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$.

a_{11} max: $a_{11}=2a_9$ $\Rightarrow a_9$ max 即 ~~a_9-a_{10} max~~ a_9-a_{10} max: 即 $-d_9$ max

一方面: 应为 $-\frac{1}{4}$ (负值 max) $\rightarrow$ 此时 $a_{11}=\frac{1}{8}$

另一方面: 设 $\frac{1}{2}$, x 个, $-\frac{1}{4}$: $(7-x)$ 个. 可解得 $x=0$. $\Rightarrow$ 可成立

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1.5	2							$\frac{1}{4}$

• 偶思: $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

$=na_1+(n-1)d_1+(n-2)d_2+\dots+d_{n-1}$

$=na_1+n(d_1+d_2+\dots+d_{n-1})-d_1-2d_2-3d_3-\dots-(n-1)d_{n-1}$

$=na_n-d_1-2d_2-3d_3-\dots-(n-1)d_{n-1}$ (倒序写)

linkI. 分部积分法

$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

$\Rightarrow f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'-f'(x)g(x)$. 两边求不定积分

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

即. $\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$

$\rightarrow \int f(x)dx=xf(x)-\int xdf(x)$

$=xf(x)-\int xf'(x)dx$

(有可能是目的,但此中应为分部积分)

No.

Date

LinkII. Abel.

① 配凑裁项: $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i-b_{i+1})+S_nb_n$. 其中 $S_n=\sum a_i$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n} S_i(b_i-b_{i+1})+S_nb_{n+1}$$

(2022. XD)

$f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}$. 数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n$, $S_n=f(a_{n+1})$, $a_2=a_{11}$. 问$a_1$max.

↓

$n\geq 2$时: $S_n=\frac{a_{n+1}^2}{4}-\frac{a_{n+1}}{2}$

$S_{n-1}=\frac{a_n^2}{4}-\frac{a_n}{2}$ > 作差, 要齐项判 | 公因式

$$a_n=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{4}+\frac{a_n-a_{n+1}}{2}=\cancel{\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{4}-\frac{a_n+a_{n+1}}{2}}$$

$$\cancel{=(a_n+a_{n+1})\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{4}+\frac{-a_n-a_{n+1}}{2}=(a_n+a_{n+1})\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow (a_n+a_{n+1})(a_{n+1}-a_n-2)=0$$

再显化公差.

(留一个XD在想的东西: 一串东西, 打括号, 打成对)

→一只又像老鼠又像水分子的兔兔.

19.（本小题满分 17 分）

菲波纳契数列$\{F_n\}$又称“兔子数列”“黄金分割数列”，是由 13 世纪的意大利数学家菲波纳契提出的，其定义是从数列的第三项开始，每一项都等于前两项的和，即满足$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.规定$F_1=1$，$F_2=1$.

（1）试证明：$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}$；

→其他方法: $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$

$\Rightarrow F_nF_{n+1}=F_n^2+F_{n-1}F_n$，裂项.

（2）求数列$\{F_n\}$的通项公式；

（3）试证明：$n\to+\infty$时，$\frac{F_n}{F_{n+1}}\approx\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解:(1) 归纳法占部分　(2) 二阶递推

(3) $\frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{1}$　$\frac{F_2}{F_3}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$　$\frac{F_3}{F_4}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$　$\cdots\Rightarrow\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$：无限繁分数化简.

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

↳只能说是神作

其他性质. eg: $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_1+S_{2n-2}$

$a_{n+m}=a_{n-1}a_m+a_na_{m+1}$.

$\{a_{n+1}-a_n\}$ T.

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=S_{2n-1}$.

$a_n^2+a_{n+1}^2=a_{2n+1}$.

$a_{n+1}^2-a_{n-1}^2=a_{2n}$.

$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots=\left(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_2a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2a_3}-\frac{1}{a_3a_4}\right)+\cdots$

裂项.

数列自查

1. $n \geq 2$

2. $\frac{1}{\sqrt{n}} \to \frac{2}{2\sqrt{n}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \end{array} \right.$ 裂项.

(1)斐波那契数列总结 1 1 2 3 5 8 13 21

(2) 1. $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

(2) 2. 通项: $a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

3. 性质

① $a_{n+1}=a_{n+2}-a_n \Rightarrow$ 邻项求和可裂项.

$1+a_3+a_5+a_7+a_9$ ($=a_{10}$)

② $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}\pm 1$.

正

$$\{a_n\} \Rightarrow S_n.\quad \frac{1}{a_n} = 4 + \frac{4}{\sqrt{a_{n-1}}} + \frac{n}{2a_{n-1}}\ (n \geqslant 2).\quad a_1 = 1.$$

则 $S_{2024} \in (1, \frac{3}{2})$ A

$(\frac{3}{2}, 2)$?

$(2, \frac{5}{2})$

$(\frac{5}{2}, 3)$

way: $\frac{1}{a_n} = (2 + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}})^2 + \frac{n-2}{2a_{n-1}}$, $a_1 = 1 \Rightarrow a_n$ 恒正.

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n} > (2 + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n}} > 2 + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}} > 2 + \frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}} > 2 + \frac{1}{\sqrt{a_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n}} > 2(n-1) + 1 = 2n - 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} < \frac{1}{2n-1} \Rightarrow a_n < \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{4\times 6} + \frac{1}{6\times 8} + \cdots + \frac{1}{(2n-2)\cdot 2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})$$

$$< \frac{5}{4} < \frac{3}{2}.$$

$\{a_n\}$, $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}(\sqrt{a_n}+2a_n)$. $S_{10}\in$ (12,14) / (14,16) ✓ / (16,18) / (18,20).

解. 设 $a_k>1$. 则 $a_{k+1}>1 \Rightarrow a_n$恒大于1.

$$\Rightarrow a_{n+1}-1=\frac{1}{3}(\sqrt{a_n}+2a_n-3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{3}{(2\sqrt{a_n}+3)(\sqrt{a_n}-1)}$$

同乘 a_n-1,

$$\frac{a_n-1}{a_{n+1}-1}=\frac{3(a_n-1)}{(2\sqrt{a_n}+3)(\sqrt{a_n}-1)}=\frac{3(\sqrt{a_n}+1)}{(2\sqrt{a_n}+3)}=1+\frac{1}{2+\frac{3}{\sqrt{a_n}}}>1.$$

∴$\{a_n-1\}$单调递减.

$1<a_n\le 2$.

$\Rightarrow 1<\sqrt{a_n}\le\sqrt{2}<2$

$$\frac{a_n-1}{a_{n+1}-1}\in\left(\frac{7}{9},\frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow a_n-1\in\left(\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1},\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)$$

对 a_n-1 求和即可.

$$\cancel{S_{10}-10=\left(\frac{7}{9}\right)^0+\left(\frac{7}{9}\right)^1+\dots+\left(\frac{7}{9}\right)^9=T_{10}}$$

$$\cancel{\left(\frac{7}{9}\right)^1+\dots+\left(\frac{7}{9}\right)^9+\left(\frac{7}{9}\right)^{10}=\frac{7}{9}T_{10}}$$

$$\cancel{\frac{2}{9}T_{10}=\left(\frac{7}{9}\right)^{10}-1}$$

$$\cancel{T_{10}=\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{10}-1}{\frac{2}{9}}=\frac{\frac{7^{10}}{9^9}-9}{2}}$$

$$S_{10}-10<\left(\frac{5}{6}\right)^0+\left(\frac{5}{6}\right)^1+\dots+\left(\frac{5}{6}\right)^9=T_{10}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^1+\dots+\left(\frac{5}{6}\right)^9+\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=\frac{5}{6}T_{10}$$

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\quad\cancel{\left(\frac{5}{6}\right)^{10}-1}\quad=\frac{1}{6}T_{10}$$

$$T_{10}=6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right)=-\frac{5^{10}}{6^9}+6$$

$\{a_n\}$, $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$, $a_1>0$. 则 $n\geq 2$ 时.

问下列判断.

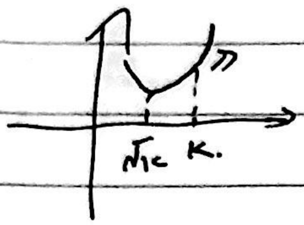
A: $a_n\geq n$ B. $a_{n+2}-a_{n+1}\geq a_{n+1}-a_n$

C. $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}$ D. $\exists K$ 正整, 当 $n\geq K$ 时, $a_n\leq n+1$.

A: $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geq 2$.

设 $a_k\geq k$

则 $a_{k+1}=a_k+\frac{k}{a_k}>k+1$. $\Rightarrow$ A ✓.



B: $a_{n+1}-a_n=\frac{n}{a_n}$

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{n+1}{a_{n+1}}$. 所以即证 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\frac{n}{a_n^2}$$

✓

C: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{n}{a_n^2}$ 即证 $\frac{n}{a_n^2}\geq\frac{n+1}{a_{n+1}^2}$ ×

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{n+1}{a_{n+1}^2}$

D, B的叠项相求

数列中一些较难的题。

例1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $a_1=\frac{1}{2}$, $b_1=2$. $a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{b_n}$, $n\in N^*$.

b_n为,公比2的等比. 证: $\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\le a_1+a_2+\dots+a_n<n$.

关 证明,由和式.

$b_1=2 \Rightarrow b_n=2^n$. $a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{2^n} \Rightarrow$ 数列a_n恒正且单增.

由和式,我希望有, $\frac{3(n-1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\le a_1+a_2+\dots+a_{n-1}<n-1$

$\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\le a_1+a_2+\dots+a_n<n$

故而, $\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}<a_n<1$

正 ① 左边: a_1处取等.

假设$n=k$成立.

即 $\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}<a_k$. 则对于$n=k+1$. $a_{k+1}=a_n+\frac{a_n^2}{2}>\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2$

$>\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{k+2}}$

即证 $\frac{1}{2^{k+2}}>\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1>2-2^{k+1}\cdot\left(\frac{9}{16}-\frac{6}{2^{k+3}}+\frac{1}{2^{2k+2}}\right)$

$0>1-2^{k+1}\left(\frac{9}{16}-\frac{6}{2^{k+3}}+\frac{1}{2^{2k+2}}\right)$

$=1-\frac{9}{16}\cdot 2^{k+1}+\frac{6}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}$. 是必然成立的. ($k=3$就开始飞天). 乱放缩).

② 右边: "有界性"

取倒: $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{\frac{a_nb_n+a_n^2}{b_n}}=\frac{b_n}{a_n(a_n+b_n)}=\frac{Y-X}{XY}=\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+2^n}$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n+2^n}\le\frac{1}{2^n}$. 累加即可.