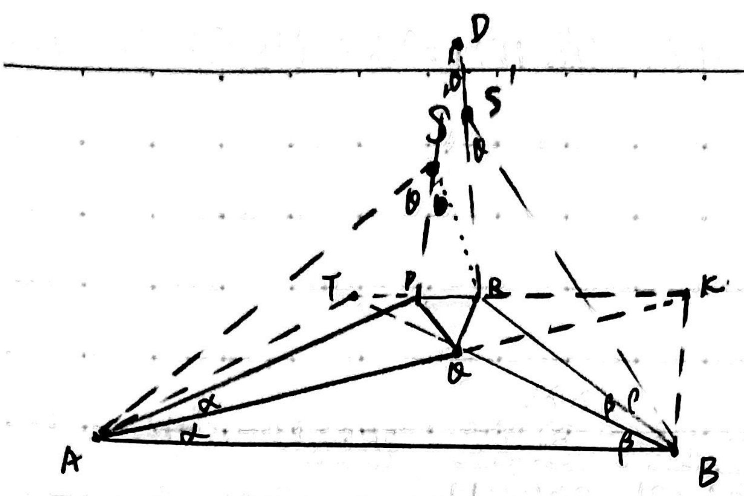
(玩花系列：几何法证明莫莉定理，(反演次图序.



作△AQB使$\angle QAB=\alpha$，$\angle QBA=\beta$．作$\angle PAQ=\alpha$，$\angle PQA=60^\circ+\beta$.

作正三角形PQR．连结RB．下证$\angle RBQ=\beta$.

延长AQ，BQ交PR，RP延长线于点K，T，连结KB，AT.

$\angle PKQ=\beta \Rightarrow$ T，K，B，A四点共圆．$\Rightarrow \angle BTK=\alpha=\angle PAQ \Rightarrow$ ATPQ四点共圆.

也即：$\angle TAQ=60^\circ=\angle TBK=60^\circ=\angle PRQ=\angle RPQ \Rightarrow$ RKBQ四点共圆.

$\Rightarrow \angle RBQ$． $\Rightarrow$ 通过这样的构造可作出AQ平分$\angle PAB$，BQ平分$\angle RBA$且$\triangle PQR$为正△.

令$\alpha+\beta+\theta=60^\circ \Rightarrow \angle APQ=60^\circ+\theta$．作点S使$\angle SAP=\alpha$且$\angle ASP=\theta$.

$\Rightarrow \angle SPR=360^\circ-(180^\circ-\alpha-\theta)-60^\circ-(60^\circ+\theta)=180^\circ+\alpha+\theta-120^\circ-\theta=60^\circ+\alpha$

连结SR．类似地找S'．使$\angle RS'B=\theta$．则$\angle S'RP=60^\circ+\beta$.

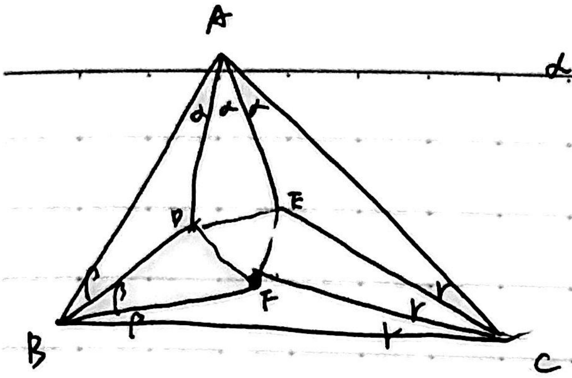
此时延长PS，RS'于点D，则$\angle PDR=\theta$.

由类似证法：$\angle PSR=\theta$．$\Rightarrow \angle SRD=0^\circ$．$\Rightarrow$ SRD共线．又：$\angle PS'R=\theta$．$\Rightarrow S=S'$.

由若干次同一法，故莫莉定理得证.

No. 三角法证明莫莉定理 & 恰成立问题.

Date



$\alpha+\beta+\gamma=60^\circ$. 考虑 $|DE|$ 的表达式是否具有对称性

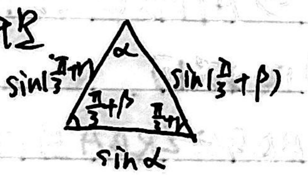
$\triangle ABD$中. $\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow |AD|=\frac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\overset{2R\sin3\gamma}{\cancel{AB}}\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)}=\frac{8R\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)}$

$=8R\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\sin\beta$.

$|AE|=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$

$\Rightarrow |EF|^2=(8R\sin\beta\sin\gamma)^2[\sin^2(\frac{\pi}{3}+\gamma)+\sin^2(\frac{\pi}{3}+\beta)-2\cos\alpha\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)]$

内构余弦定理

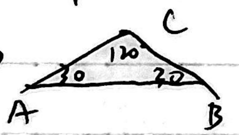


R外$=\frac{1}{2}$. $\Rightarrow |EF|^2=(8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$. ✓

一道运用类似余弦定理转化的恰成立问题 ⟶ 取等.

$\triangle ABC$中: $\sin^2C+2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C=3\sin^2A+3\sin^2B$

$\Rightarrow$



理由: $c^2+2\sqrt{3}ab\sin C=3a^2+3b^2$.

$\Rightarrow a^2+b^2-2ab\cos C+2\sqrt{3}ab\sin C=3a^2+3b^2$

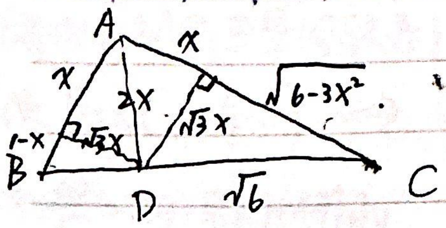
$\Rightarrow 2ab\cdot 2\sin(C-\frac{\pi}{6})=2a^2+2b^2$

$\Rightarrow C=\frac{2}{3}\pi$. 且 $a=b$. ⟶ 有界性才能会出现双取等.

解三角形单题series.

1.(2025,成都三诊)

$\angle BAC=120^\circ$, AD平分$\angle BAC$. $CD=\sqrt{6}AB$, 问 $tg\angle ABC$.



(法一：暴力. 做不动) 角平分线性质. 所以 $tgB=\frac{\sqrt{3}x}{1-x}$, $tgC=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{6-3x^2}}$.

$tg(B+C)=\sqrt{3}$. 代入化简:

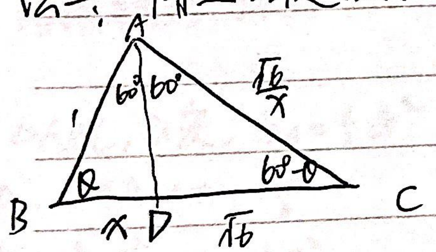
$8x^4-4x^3-10x^2+12x-3=0$.(或用角平分线定理,也可得)

→没有可能的有理根,尝试2次乘2次的待定系数法.

$(2x^2+2x-1)(4x^2-6x+3)=0$ $\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 代入: $tg\angle ABC=1$.

$\downarrow$ $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ $\downarrow$ 复根

法二,用正弦定理.(两个三角形中用)



$$\frac{AD}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{AD}{\sin(60^\circ-\theta)}=\frac{\sqrt{6}}{\sin60^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{x}}{\sin(60^\circ+\theta)},$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin60^\circ}{\sqrt{6}\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\sin(60^\circ+\theta)}$$

$$2\sqrt{2}\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\cos2\theta+\tfrac{1}{2})=\sin\theta. \quad \Rightarrow \theta=45^\circ$$

2. 湖北八市3月(倍角定理)

(一道三角，校模考场上光速梳救2分。brain child.

T10 D

△ABC：$b^2+c^2=2a^2$，问 $\frac{ab}{c^2}$ 取值 range.

(齐次化刻画变量间联系)

设 $\frac{a}{c}=x$，$\frac{b}{c}=y$ $\Longrightarrow \begin{cases} x+y>1 \\ |x-y|<1 \end{cases}$ (此时对△ABC的翻译是完整的)

$\Rightarrow \frac{ab}{c^2}=xy$：用反比例函数刻画，

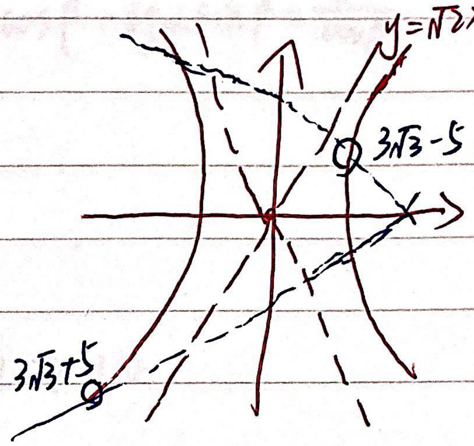
(a,b对称，不妨 $0<x-y<1$.

$a+b>c$
$0<a-b<c$.
$\Rightarrow b-a<c$
必.

$\Rightarrow \begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$

$b^2+c^2=2a^2$

$\Rightarrow (\frac{b}{c})^2+1=2(\frac{a}{c})^2$ 即 $2x^2-y^2=1$.



线性规划

考场联想：2406(高二)台期末(这卷含金量太大……).

△ABC，a定，$S_\triangle=\frac{1}{2}a^2$

A. $\tan A\ max=\frac{4}{3}$

B. $b^2+c^2\ min=2a^2$

C：$C_{\triangle ABC}\ min=(\sqrt{5}+1)a$

D：$\frac{b}{c}\in[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$

No.
Date

同题异构.

1. α,β 锐，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$，问 α,β 大小关系

①从特殊 → 一般：$\alpha=\beta$ 恒成．⇒ $\alpha=\beta$（单选）

② $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=\cos\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+\alpha]$ 积化和差.

$\cos(\alpha-\beta+\beta)+\cos(\alpha-\beta-\beta)=2\cos\alpha \Rightarrow \Rightarrow \cos\alpha=\cos(\alpha-2\beta) \Rightarrow 2\alpha-2\beta=0$ ✓

2. α,β，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta}$，问 α 最值．→ 参变分离：$f(\alpha)=g(\beta)$

[$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta+\tan\alpha\sin\beta=\frac{2}{\cos\beta}$

$\Rightarrow \tan\alpha=2\tan\beta+\frac{1}{\tan\beta}$]

3. $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}-1$．问 α,β

假设法：$\alpha>\beta$ × $\alpha<\beta$ × 值域对比

主元法．左关于 α ↑ 右关于 α ↓．

4. △ABC $\frac{\sin A}{\sin B}=n\sin C$，$\frac{\cos A}{\cos B}=n\cos C$．$\tan A=2$．问 $n=$？

误区．$\sin A=n\sin B\sin C$，$\cos A=n\cos B\cos C$ ⇒ 相减：$\cos A-\sin A=-n\cos A$

⇒ $1-\tan A=-n$ ⇒ $n=1$． ✗

检验：$\begin{cases}\sin A=\sin B\sin C\\ \cos A=\cos B\cos C\end{cases}$ ⇒ ~~$\tan A=\tan B\tan C=2$~~

$\begin{cases}\sin C=\frac{2}{\sqrt5}\times\frac{1}{\sin B}\\ \cos C=\frac{1}{\sqrt5}\times\frac{1}{\cos B}\end{cases}$ ⇒ $\frac{4}{5\sin^2 B}+\frac{1}{5\cos^2 B}=1$．有值取否（全为1）

但 ×．

or，$\tan A=\tan B\tan C=\frac{-\tan B-\tan C}{1-\tan B\tan C}$，令 $\tan B=t$．解二元一次方程．

[解方程意识] 2个方程．要相加，也要相减

要相乘也要相除

KOKUYO

No.

Date　.　.

解三角形的路径选择.

$\sin C\cos A\cos\frac{C+B}{2}=\sin^2 A\sin\frac{C-B}{2}$，问 $\frac{a^2-b^2}{ac}$ 取值范围. ：$(0,2)$

① cos半角用正弦去处理 [$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$，而另一个用积化和差]

$\boxed{\text{化哪个?}}$ ← 哪个好化

$(C+B)=(\pi-A)$ ✓

$(C-B)=?$ ×

→ 两边同乘 $\sin\frac{C+B}{2}$. ✓

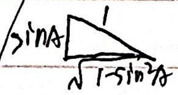
$\Rightarrow \operatorname{tg}B=\sin A$.

② $\frac{a^2-b^2}{ac}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin A}=\frac{\sin A\cos B}{\sin A}-\frac{\sin B\cos A}{\sin A}$

$=\cos B-\frac{\sin B}{\operatorname{tg}A}$

消元

先用正弦平方差 or 先代 $C=A+B$ 减元?



③ 注意正负，$\operatorname{tg}A$，$\sin A$：三角函数线　$\operatorname{tg}A=\pm\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$. $\Rightarrow$ 原式 $=\cos B\pm\sqrt{\cos 2B}$

$x\pm\sqrt{2x^2-1}$.

$A\pm B$

其中 $2A^2-1=B^2$

找规

另一途径，直接代.

$\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\frac{\operatorname{tg}^2 B-\sin^2 B}{\operatorname{tg}B\sin C}=\frac{\operatorname{tg}B-\sin B\cos B}{\sin C}=\frac{\operatorname{tg}B(1-\cos^2 B)}{\sin C}=\frac{\operatorname{tg}B\sin^2 B}{\sin C}$

$=\frac{\operatorname{tg}B\sin^2 B}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}=\frac{\sin A\sin B}{1+\cos A}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B$

$\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$.

$\sin B=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 B}{1+\operatorname{tg}^2 B}}=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A}}=\pm\sqrt{\frac{(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2})^2}{1+(\ \cdots\ )^2}}$

↓

切会单变元.

KOKUYO

No.

Date . .

易错 △

1. $f(x)=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$ $T^+_{min}=\pi$ （定义域）

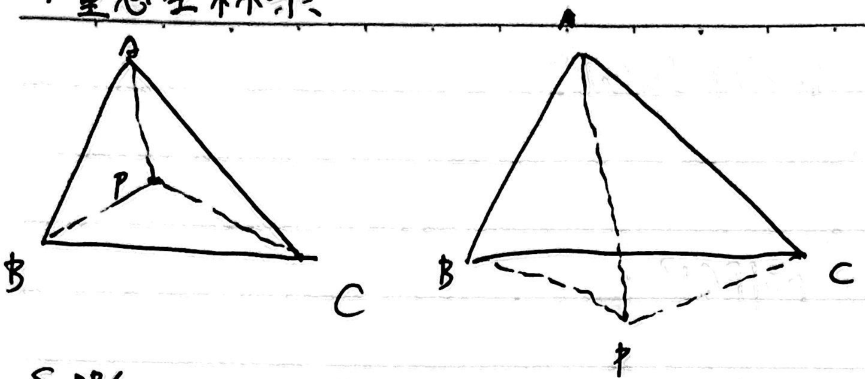
2. $tg\alpha, tg\beta$ 为 $x^2+6\sqrt{3}x+7=0$ 的两根，$\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，$\alpha+\beta = -\frac{2}{3}\pi$

[$tg(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$，而由Vieta，$\begin{matrix} tg\alpha<0 \\ tg\beta<0 \end{matrix}$]

3. $\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \exists k\in Z$ 使 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$.

几何不等式的一些整理：平几

一. 重心坐标系



$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\lambda_1$ (对A)，$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}=\lambda_2$ (对B)，$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\lambda_3$ (对C) $\quad(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1)$

λ：有向面积，可正可负可零 → 边/顶点

可负 ↓ 有图.

重心坐标：$(1,1,1)$：$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ → 重心 (可以选择性的不约去$S_总$)

(a,b,c)： 内心.

$(\sin2A,\sin2B,\sin2C)$： 外心.

$(1,1,-1)$： 把△整个延一条边作"中心对称"，出平行四边形.

二. 重要公式.

再给任意一点Q，有恒等式.

$$(\sum\lambda_1)(\sum\lambda_1|QA|^2)=\sum\lambda_1\lambda_2|AB|^2+(\sum\lambda_1)^2|PQ|^2.$$

证明：用 $x=\frac{\sum\lambda_1x_1}{\sum\lambda_1}$，$y=\frac{\sum\lambda_1y_1}{\sum\lambda_1}$，展开即可 (此中保齐次，$\sum\lambda$不一定为1).

①.令P为内心I，Q为外心O.

$\Rightarrow\lambda_1=\frac{ar}{2}$，$\lambda_2=\frac{br}{2}$，$\lambda_3=\frac{cr}{2}$ 代入可得：$|PQ|^2=|OI|^2=R^2-2Rr$ → $R\geq2r$ (Euler)

② 取Q为外心O. → 取等：$|PO|=0$：重合

代入公式：$(\sum\lambda_1)^2R^2=\sum\lambda_1\lambda_2|AB|^2+(\sum\lambda_1)^2|PO|^2\geq\sum\lambda_1\lambda_2|AB|^2$

换元：$\lambda_1=\lambda_1'a^2$，$\lambda_2=\lambda_2'b^2$，$\lambda_3=\lambda_3'c^2$

$\Rightarrow(\sum\lambda_1'a^2)^2R^2\geq\sum\lambda_1'a^2\lambda_2'b^2c^2=(abc)^2\sum\lambda_1\lambda_2$

$4RS_\triangle=abc$. 此即为加权形式的外森比克不等式 $(a^2+b^2+c^2\geq4\sqrt{3}S_{\triangle ABC})$ (Oppenheim不等式)

$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

③ 取 $P=G$，$Q=O$

$(\sum\lambda_1)^2R^2=\sum\lambda_1\lambda_2|AB|^2+(\sum\lambda_1)^2|OG|^2$

即：$a^2+b^2+c^2+9|OG|^2=9R^2$.

④. Q任意，P重心：

$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+3|PG|^2$.

⑤ 取PQ重合均为外心.

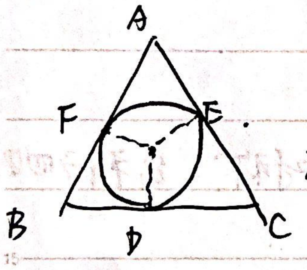
$(\sum\lambda_1)^2R^2=\sum\lambda_1\lambda_2|AB|^2+(\sum\lambda_1)^2\cdot 0=\sum\lambda_1\lambda_2|AB|^2$

$\Rightarrow$ ~~立~~ $(\sum\lambda_1)^2=\frac{\sum\lambda_1\lambda_2c^2}{R^2}=\frac{\sum\lambda_1\lambda_2(2R\sin C)^2}{R^2}=4\sum\lambda_1\lambda_2\sin^2C$

$\Rightarrow (\frac12\sum\lambda_1)^2=\sum\lambda_1\lambda_2\sin^2C$

（~~故~~即：P任意，Q外心：$\frac14(\sum\lambda_1)^2\geq\sum\lambda_1\lambda_2\sin^2C$）

单形转换：



$\angle DFE=\frac{\pi-C}{2}$.

在△DFE中使用以上结论，

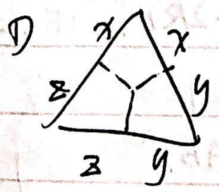
$\frac14(\sum\lambda_1)^2\geq\sum\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{C}{2}=\sum\lambda_1\lambda_2(\frac{1+\cos C}{2})=$

$\Rightarrow \frac12(\sum\lambda_1)^2\geq\sum(\lambda_1\lambda_2)(1+\cos C)=\sum\lambda_1\lambda_2+\sum\lambda_1\lambda_2\cos C$

$(\sum\lambda_1)^2\geq2\sum\lambda_1\lambda_2+\sum\lambda_1\lambda_2\cos C$

$\Rightarrow \sum\lambda_1^2\geq\sum\lambda_1\lambda_2\cos C$.（加权和）（三几中：空间面积投影引理 加权权值）

三：切线长代换与哈达威克不等式

①  $\Rightarrow S=\sqrt{(x+y+z)xyz}$

② 哈：$\sum a^2\geq4\sqrt3S+\sum(a-b)^2$.

$\rightarrow$ 证明：先切线长代换.

即证 $\sum xy\geq\sqrt3\sqrt{xyz(x+y+z)}$

（Schurr不等式）

③ 嵌入：$\sum a^2\geq2\sum ab\cos C$，$ab=\frac{2S_\triangle}{\sin C}$. 代入.

$\sum a^2\geq4S_\triangle(\cot A+\cot B+\cot C)$

点距公式续II.

考虑三角形的三个参数 p, R, r.

有：$S = pr$，~~$abcR = 4pr$~~

$\frac{abc}{4R} = pr$.

$\sum bc = p^2 + 4Rr + r^2$，$\sum a^2 = 2(p^2 - 4Rr - r^2)$

$\sum (p-b)(p-c) = 4Rr + r^2$

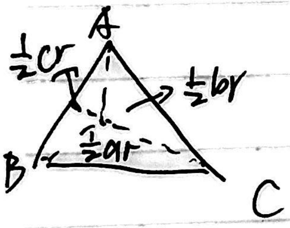
$\sum (p-b)(p-c)a = 2p(2Rr - r^2)$

Gerretsen：$p^2 \geq 16Rr - 5r^2$

$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq p^2$

① 简证，由点距公式：$(\sum \lambda_1)(\sum \lambda_1 |QA|^2) = \sum \lambda_1 \lambda_2 |AB|^2 + (\sum \lambda_1)^2 |PQ|^2$

则令 $Q = O$，$P = I$



代入：$pr \cdot prR^2 = \frac{1}{4}\sum abc^2 r^2 + p^2 r^2 |OI|^2$

$p^2 r^2 R^2 = \frac{1}{4} abcr^2(a+b+c) + p^2 r^2 |OI|^2$

$p^2 r^2 R^2 = 2p^2 Rr^3 + p^2 r^2 |OI|^2$.

$R^2 = 2Rr + |OI|^2$

② 考虑 $|IG|^2 = \frac{1}{9}(p^2 - 16Rr + 5r^2)$：令 ~~$Q = G, P = I$~~，以P为"重心坐标"

$(\frac{1}{3})$

$Q = I$，$P = G$

$(\sum |GA|^2$：用中线长$)$

(这里有一个选择问题)

选Q

~~则：$S \cdot \frac{S}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = \frac{S^2}{9}$~~

$(\sum |IA|^2 = ab + bc + ca - \frac{6abc}{a+b+c})$

③ 考虑垂心与内心 $|IH|^2$