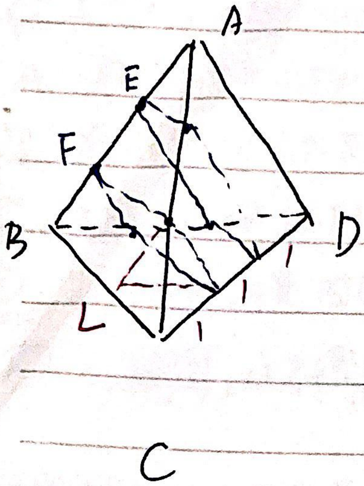
立几单题series.

(2505 22校模 T14). 求分面积比例.



*为了防止割柱体的时候高标错

应当直接用比例 (用S底·h去列，也不用具体求体积)

ABD到割面的距离不是h/3！C投到ABD上是ABD中心

而非BD中点!!!!

(7:13:7)

是h×$\frac{2}{3}$

(你写了个莫名其妙根号误导的—)

(这个视角看四面体的确会误认为C投到ABD上是BD中点。

因为看着像ABD⊥BDC)

注意一下

NB二模T11单题分析（立几综合）

平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$|AB|=2$，$|AD_1|=\sqrt{2}$，$|BC|=|CC_1|=1$，$CC_1\perp CD$，$\angle ADC=120^\circ$，E为CD中点，F在BC上（可端）． ABD

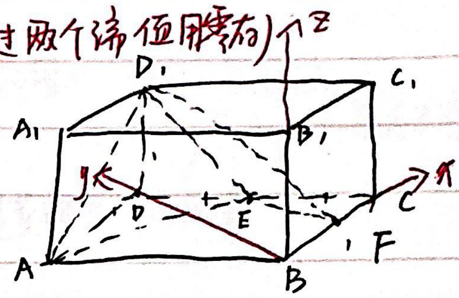
A．存在F使 $A_1F\parallel AD_1E$ （$F=C$）

B．存在F使 $AD_1E\perp D_1EF$ （B可通过建系解x，也可通过两个端值用零存）

C：不存在F使 $|D_1F|+|EF|=\sqrt{10}$ （零存） (3.16227)

D：不存在F，使四棱锥 $F-CDD_1C_1$ 有内切球

????（视图，从不同角度去画内心，$r_内$）

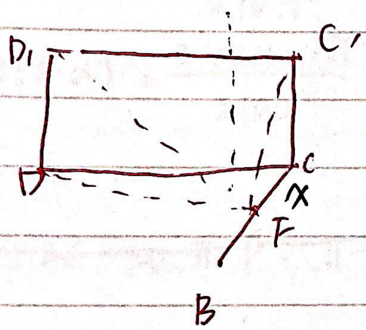


①值得关注的有系可建

②C的最小值其实不太好求，但可以用零存去逼（值域介值性&连续）

C：$\sqrt{5}+1$． B：3． ⇒存在
(3.236)

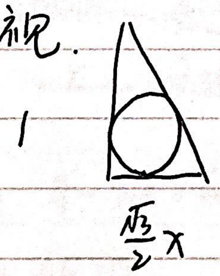
D：考虑角平分面． → 找到内切球球心．



① $F-CC_1-D$，$F-DD_1-C$ 两面交线：过 $\triangle FCD$ 内心的底面垂线 ⇒俯视．$r_{CFD内}$ 可求

想法：用奔驰与内心坐标求，然后去逼 FD_1C_1 和 FDC 的点距和平面方程，

②左视．



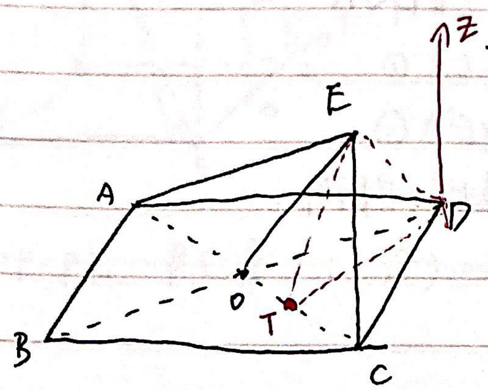
的 r_2，

$(r_1=r_2:x\in(0,1)$ 有解$)$

大小角定理（整理&correction）典例，一直在理解错.

矩形ABCD中心为O，BC > AB.，将△DAC沿AC翻至△EAC.

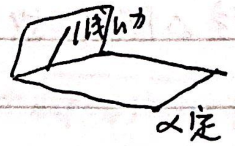
∠BOE = α，二面角 B-AC-E = β，DE与BC所成角为γ. 问α, β, 2γ与β.



cor I：α与β不能用大小角定理比较.

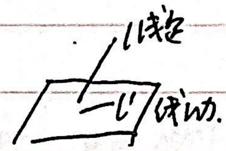
这个情况不对.

最大角



线面角 ≤ 面面角

最小角



线线角 ≥ 线面角

[用线段长刻画角度]

△EOC ≌ △DOC. ET⊥OC, DT⊥OC. ⇒ ∠ETD 为所作角.

$\cos(\pi-\beta) = \dfrac{2|DT|^2-|DE|^2}{2|DT|^2} = 1-\dfrac{|DE|^2}{2|DT|^2}$.（两个等腰△）（可比） $\Rightarrow \alpha > \beta$

$\cos(\pi-\alpha) = \dfrac{2|DO|^2-|DE|^2}{2|DO|^2} = 1-\dfrac{DE^2}{2|DO|^2}$

$\cancel{\beta,\ 2\gamma \Rightarrow \pi-\beta,\ \pi-2\gamma} \Rightarrow \dfrac{\pi-\beta}{2},\ \dfrac{\pi-2\gamma}{2}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

~~ED与DT~~, $\cancel{\dfrac{\pi}{2}-\gamma}$. $\Rightarrow \beta < 2\gamma$.

$\cancel{\gamma \quad \dfrac{\pi}{2}-\langle ED, DT\rangle}$

△EAD 也是等腰△，$\gamma = \angle EDA$. $\pi-2\gamma = \angle EAD$.

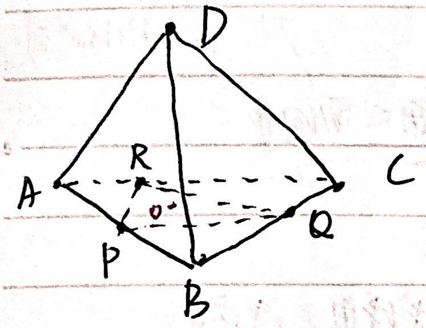
$\pi-\beta = \angle ETD$.

[符合原来的想法，这其实有点像 外接圆/米勒/大圆径]

⊕优先用三角函数来刻画角(2023四省联考 eg)有个球/4的方法)

(17计析). 正四面体, $PA=PB$, $\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RA}=2$.

$D-PR-Q=\alpha$, $D-PQ-R=\beta$, $D-QR-P=\gamma$. 比大小



△ABC中心即为D投,

O往△PRQ三边作垂线. 即得.

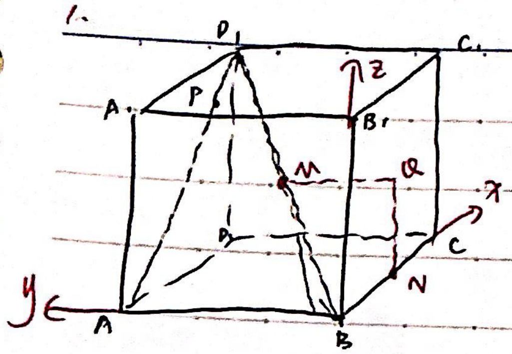
*边角转化(宝公式)

No.

Date

立几中的最值问题

1.



cube，P为AD_1上靠D_1的四等分点，棱长为1。

M在BD_1上，N在BC上。问 $PM+\frac{\sqrt{2}}{2}MN_{min}$

(注意天然的胡不归模型)

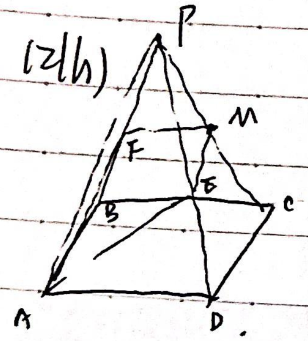
① 对于一个确定的M，都取最小的MN（$MN\perp BC$）

② 构造$\frac{\sqrt{2}}{2}MN$。作$MQ\perp$面BCC_1B_1

∴ 即求$PM+MQ$ 然取三点共线即可

~~$M(p,p,p)$. $P(\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}) \Rightarrow p+\sqrt{(p-\frac{3}{4})^2\times2+(p-1)^2} \Rightarrow p+\sqrt{3p^2-5p+\frac{17}{8}}$~~

2. (2lh)

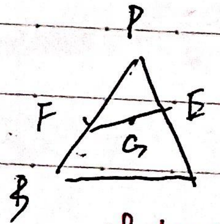


边长2，高为3。$M=\frac{1}{2}PC$，平面AEMF。求 V_{P-AMEF} max, min

→ 关注不变量，~~转为平面问题~~

① $V_{P-AFME}=V_{F-APM}+V_{E-APM}$ ：APM固定

$\sim d^F_{PO}+d^E_{PO}$



结合重心 $\vec{PF}=\mu\vec{PB}$，$\vec{PE}=\lambda\vec{PD}$

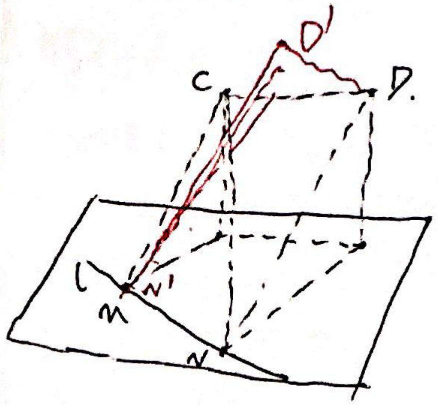
$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$

(1/t 对勾/抛物线)

② PFE定面，$d^A_{PFE}+d^M_{PFE}$定值，即求$S_{\triangle PFE}$范围

③ AFEM四点共面，用P出点向量（和为1）。

关于两点与一异面动直线的最值问题，对比学习与化归.（2道模拟题）



C,D在面外，l为平面内一线，问 C-l-D 二面角的max.

[以小博大，知方法]

①. $CM\perp l$，$DN\perp l$.（由二面角定义）.

二面角即为CM，DN夹角. (M,N任意).

大小角定理.

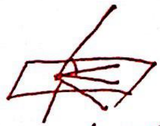
即CM与平面DMN夹角.

由 线面角≤线线角：即∠CND.

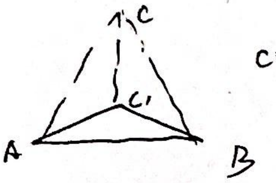
⇒ CD定，平面上找一个点，使θ有极.

这里有化归思想.

由米勒，即为外切圆(过C,D,正)与平面相切时.



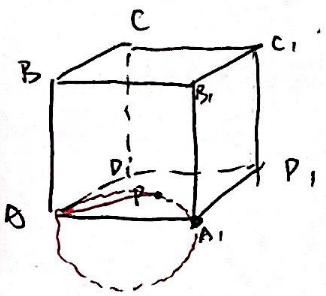
移动直线后会比较难看



$CC_1\perp$平面AC_1B，那么 $\angle CAB>\angle C_1AB$，$\angle CBA>\angle C_1BA$，⇒ $\angle ACB<\angle AC_1B$.

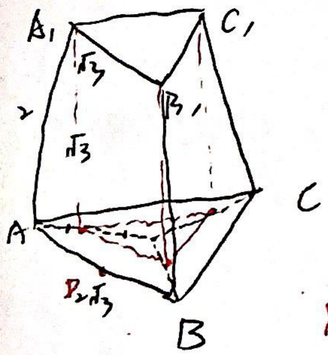
例.（2406日）正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为正方形ADD_1A_1中心，$l\subset$底面ABCD，问 A_1-l-P 的二面角正弦max

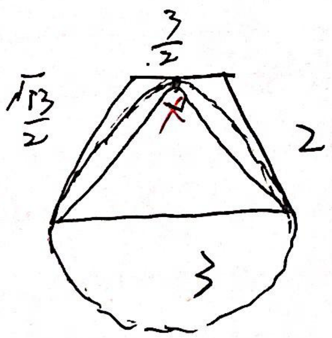
$\frac{\sqrt2}{2}$

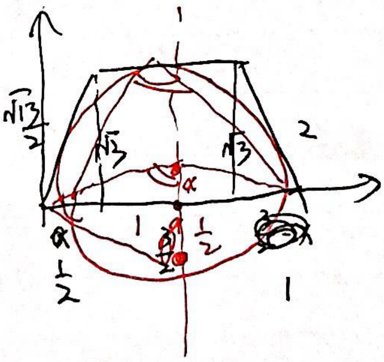


例（2406日）正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$，$AB=2\sqrt3$　$A_1B_1=\sqrt3$　$AA_1=2$，D为棱AB中点.

l为平面$A_1B_1C_1$内一条动直线. C-l-D二面角θ，cosθ min？







圆过

$(x-1.5)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

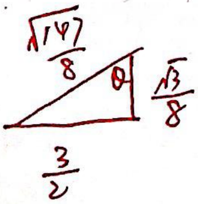
~~$(x-1.5)^2+y$~~

$(\frac32)^2+x^2=(x-\sqrt3)^2$

$\frac94=-2\sqrt3x+3$

$2\sqrt3x=\frac34$

$x=\frac{3}{4\times2\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{8}$



$(\frac32)^2+x^2=(x+\sqrt3)^2$

$x^2+\frac94=x^2+2\sqrt3x+3$

$\frac{-3}{4}=2\sqrt3x$　×

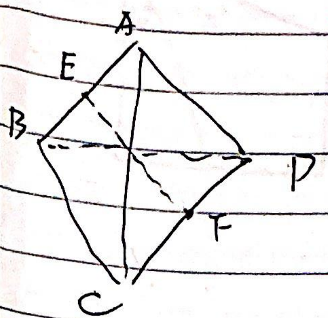
$\cos\theta=\frac{\sqrt3}{\sqrt{147}}=\frac17$.

特殊四面体

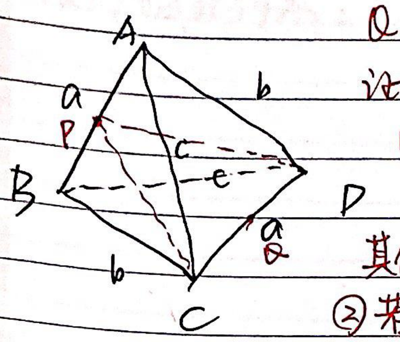
1. 四面体ABCD，E，F为AB，CD中点，EF⊥AB，EF⊥CD，AB=CD.

⇒放入长方体求体积(割补)/外接球S表

(垂直交点情况)



2. 三组对棱分别相等的四面体



Q：能否一定放入长方体.

证明：取AB，CD中点P，Q，由中线长，PC=PD ⇒ PQ⊥CD，

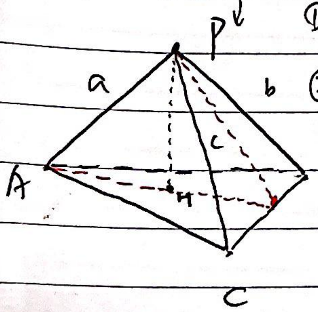
则同"1"情况.

其他性质：①每个面全等，⇒过一个顶点的三面角，三个角和为π

②若四个面周长相等，则可知对棱分别相等.

3. "一个面截外接球的面积"：用平面几何解三角形，不要先求找用圆心与半径过渡!

4. 墙角四面体.



① $\frac{1}{|PH|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

② H垂心

③ 三个直角面与底斜面夹α，β，γ.

⇒ ~~$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$~~

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{PH^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}+\frac{PH^2(b^2+c^2)}{b^2c^2}+\frac{PH^2(c^2+a^2)}{c^2a^2}$

$=\frac{2PH^2}{a^2b^2c^2}(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)$

$=2PH^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=2$. ∴定值.

④ ~~斜面面积S，3个直角面S_1,S_2,S_3. ⇒ $S_1+S_2+S_3>S$ (射影)~~

而结合③，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ⇒ $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2$

($\cos=\frac{S_{射}}{S}$)

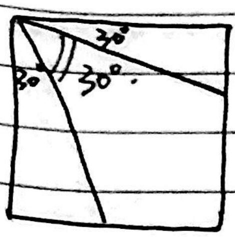
⇒ $(S_1-S_2)^2+(S_2-S_3)^2+(S_3-S_1)^2=3S^2-(S_1+S_2+S_3)^2\geq0$ ⇒

$S_1+S_2+S_3\leq\sqrt{3}S$.

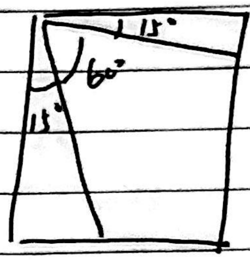
⑤ 内切球半径r：$\frac{1}{3}(S+S_1+S_2+S_3)r=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}S\cdot h$. ⇒ $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}$.

空间感知力.

1.



写60°：逆运算能力不过关.



2.（正方体有6个面，12条棱）→ 数晶胞配位时也会错

棱切球在体外：6个球冠（not 4个）.

立几的一些整理与方法优化.

概念自查

1 斜二测

2. 锥台体的VS

3. 正三棱锥, 正四面体, 直

4. 三面角定理

大小角定理

空间余弦定理

向量回路定理

距离公式(法向量)

5. 角度范围 (especially 平面与平面 & 二面角).

6. "存在一个点……": 设为 $\vec{AE}=\lambda\vec{AB}$

7. 高不要乱来

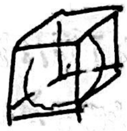
6. 如图，二面角 α-AB-β 的大小为 θ，P，Q 分别在平面 α，β 内，$PM\perp AB$，$NQ\perp AB$，$|PM|=m$，$|QN|=n$，$|PQ|=l$，则 $|MN|$ 等于(D).

A. $\sqrt{l^2-m^2-n^2+2mn\cos\theta}$

B. $\sqrt{l^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta}$

C. $\sqrt{m^2+n^2-l^2+2mn\cos\theta}$

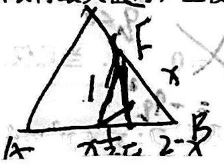
D. $\sqrt{l^2-m^2-n^2\pm 2mn\cos\theta}$



16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，底面 ABC 是正三角形，$BA=BP=2$，$\angle CBP=90°$，$\angle ABP=120°$，E,F 分别是棱 AB,BC 上的动点，且 $AE=BF$，当三棱锥 $P-BEF$ 的体积取得最大值时，三棱锥 $P-BEF$ 的外接球表面积为 ▲ .

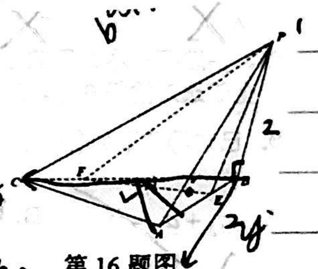
~~$\frac{102}{3}\pi$~~

$\frac{19}{2}\pi$



~~$\frac{\sqrt{3}}{4}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}$~~

$O(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.



第 16 题图

四面体内切球：等体积法

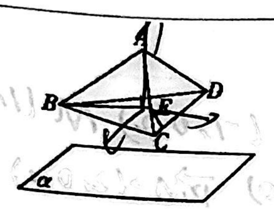
三道立几的旋转问题.

7. 已知 MN 是正方体内切球的一条直径，点 P 在正方体表面上运动，正方体的棱长是 2，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围为 $=\overrightarrow{PO}^2-1$. （B）.

转化法

A. $[0,4]$ B. $[0,2]$

C. $[1,4]$ D. $[1,2]$



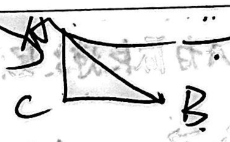
（第 16 题）

16. 如图，在正四面体 $ABCD$ 中，$CD /\!/$ 平面 α，点 E 在 AC 上，且 $AE=2EC$，若四面体绕 CD 旋转，则直线 BE 在平面 α 内的投影与 CD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{7}}{7},1\right]$

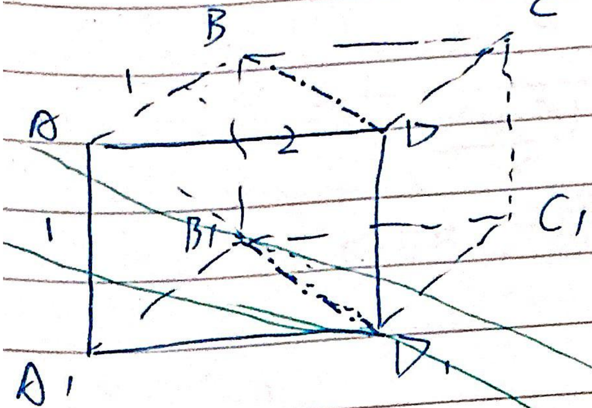
正三棱锥 $S-ABC$，SA、SB、SC 墙角，$AB=2$，M 是侧棱 SC 中点，AC 在平面 α 内。记直线 BM 与 α 所成角为 θ，则三棱锥绕 AC 旋转时 θ 取值？

A 53°　　B 60°　　C 75°　　D 90°

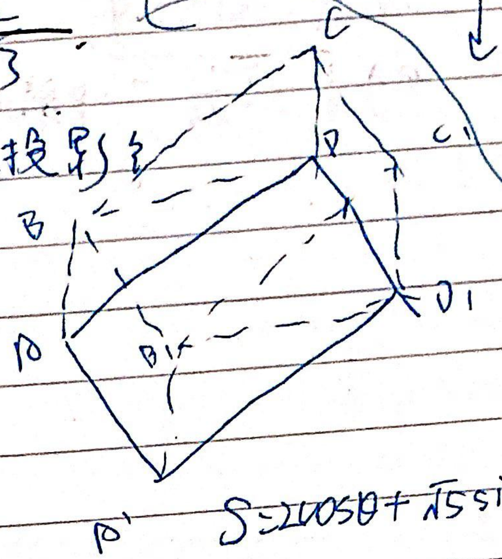
.a,b 为空间中两条互相垂直的直线，直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在的直线与 a,b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，$\angle ABC=30^\circ$，当直线 AB 与 a 成 60° 角时，AB 与 b 所成的角为 $\underline{\ \frac{\pi}{4}\ }$.



长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=1$，$AD=2$，BD在平面α上，若长方体绕BD转动，则转动process中，长方体在α上的S投max时，α与平面ABCD所成角θ的cos = $\frac{2}{3}$.



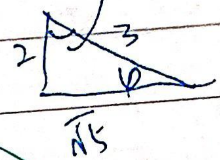
·构造投影面

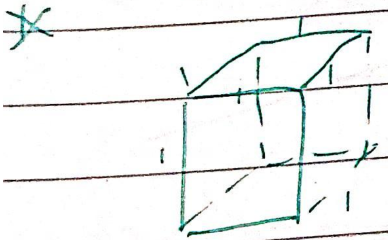


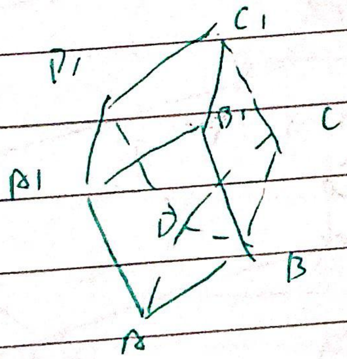
$S=2\cos\theta+\sqrt{5}\sin\theta$

$=\sin(\theta+\varphi)$

其中 $\tan\varphi=\frac{2}{5}\sqrt{5}$







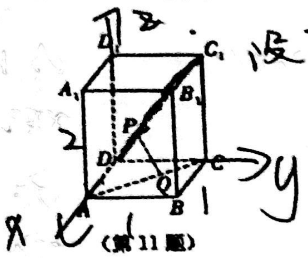
BD投出，$S_{\triangle CDB}$，$S_{\triangle B_1D_1DB}$，$S_{\triangle A_1D_1B_1}$

$\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}\cos\theta+\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta$

11. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=BC=1$，动点 P，Q 分别在线段 C_1D，AC 上，则线段 PQ 的长度可能是（ ABC.

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 3



(第11题)

设 $\vec{DP}=\lambda\vec{DC_1}$，$\vec{AQ}=\mu\vec{AC}$. ∴