No.

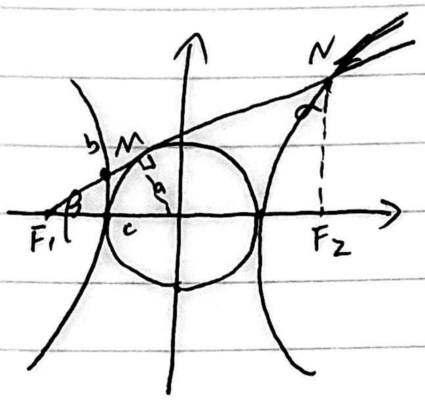
Date

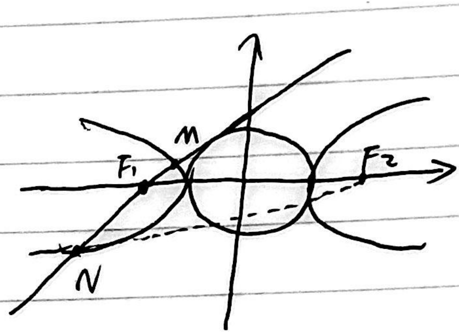
离心率小题卡住.

要会用正弦定理!

→ 作题是设这个的,否则无.

(2022全国乙卷的错题). 双曲线两个焦点 F_1, F_2, 以C的实轴为直径的圆记为D, 过F_1作D切线与C的两支交于M, N. 且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$. 则 $e=$?





①. 明确已知. 用三角函数刻画角度

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. , $\cos\beta=\frac{b}{c}$, $\sin\beta=\frac{a}{c}$.

$\Rightarrow \angle NF_2F_1$: $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3a+4b}{5c}$

正弦, $\frac{2c}{\sin\alpha}=\frac{NF_2}{\sin\beta}=\frac{NF_1}{\sin(\alpha+\beta)}$, 而$|NF_2|-|NF_1|=-2a$. 即得

↓

一个没什么感觉的漏条件. 不要光会用余弦!

KOKUYO

No.

Date

小题易错（圆曲）

- $\frac{x^2}{\cos^2\theta}+\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1$ 表示焦点在x轴的椭圆 $\Leftrightarrow$ 2θ为第一象限/第四象限。

- 双曲线. $\frac{x^2}{\underset{\Delta}{2m}}-_{\Delta}\frac{y^2}{\underset{\Delta}{m-6}}=1$ 焦距为6 $\Rightarrow m=-1$

  (not 5！代不回去！)

  假的

KOKUYO

No.

Date

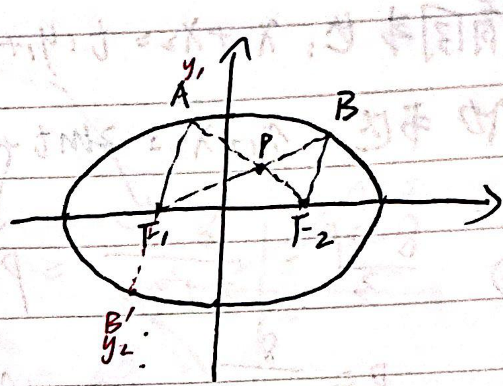
圆曲中的(定)比例与转化法(小→大)

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $(1,e)$ $(e,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 都在椭圆上 ⑴方程 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2). A, B 在 x 轴上方. $AF_1 // BF_2$, $AF_2 \cap BF_1 = P$. (12 江苏)

① $|AF_1|-|BF_2|=\sqrt{6}/2$. 问 k_{AF_1}

② $|PF_1|+|PF_2|$ 定值?



(2) ① 设 AF_1: $x=my-1$. 联立 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$

$$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2} \\ y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2} \end{cases}$$

$|AF_1|=\sqrt{1+m^2}\,y_1$

$|BF_2|=\sqrt{1+m^2}\,(-y_2)$

$\Rightarrow |AF_1|-|BF_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{2m}{m^2+2}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow m=\sqrt{2}$ (含负) $\Rightarrow k_{AF_1}=\sqrt{2}/2$

② 设 $\frac{|BF_2|}{|AF_1|}=\lambda$. $\Rightarrow |PF_1|=\frac{\lambda}{\lambda+1}|BF_1|$, $|PF_2|=\frac{1}{\lambda+1}|AF_2|$

$=\frac{\lambda}{\lambda+1}(a+ex_B)$ $\qquad =\frac{1}{\lambda+1}(a-ex_A)$

$=\frac{\lambda}{\lambda+1}(\sqrt{2}+\frac{x_B}{\sqrt{2}})$ $\qquad =\frac{1}{\lambda+1}(\sqrt{2}-\frac{x_A}{\sqrt{2}})$

其中 $\sqrt{2}(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+1})=\sqrt{2}$, 下证

$\frac{\lambda x_B-x_A}{(\lambda+1)\cdot\sqrt{2}}$ 为定值. 即 $\frac{x_A+\lambda x_B'}{-\sqrt{2}(\lambda+1)}=\frac{my_A-1+\lambda(my_B'-1)}{-\sqrt{2}(\lambda+1)}=\frac{m(y_A+\lambda y_B')-(\lambda+1)}{-\sqrt{2}(\lambda+1)}$

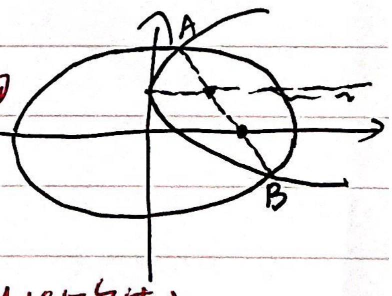
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 即证.

2. (06 湖南理).

C_1 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, C_2 $(y-m)^2=2px$ $(p>0)$ C_1C_2 的公共弦 AB 经过 C_1 的右焦点.

问: 是否存在 m, p 值使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上?

① (用 AB 联立 2 个, 双韦达, 硬算的过程~~繁琐~~) AB: $x=ty+1$



① p, m 用 t 单表示. (算理与结构处理技巧)

$p=\frac{4}{(3t^2+4)(t^2+\frac{1}{2})}$, $m=\frac{-3t}{3t^2+4}-\frac{4t}{(3t^2+4)(t^2+\frac{1}{2})}$

得 $t \Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. $p=\frac{4}{3}$, $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ (要回头算一下, 此刻尤固当性)

No.

Date

② 转维度：第二定义 → x平曲上

$|AB| = x_1 + x_2 + p,$

$= a - ex_1 + a - ex_2 = 4 - \frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x_1+x_2 = \frac{2(4-p)}{3}$

椭圆韦达：$x_1+x_2 = t(y_1+y_2)+2$

抛物韦达：$x_1+x_2 = 2mt+2pt^2+2$

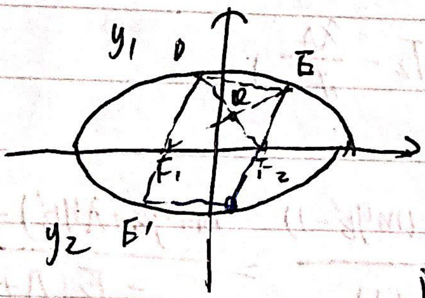
$\frac{p}{2} = tm+1$（焦点在一上，用一下代换）

$\Rightarrow \frac{8-2p}{3} = \frac{8}{3t^2+4} = p(1+2t^2)$

$p = \frac{8}{6t^2+5}$. $\Rightarrow$ 得 t $\Rightarrow 6t^4+5t^2-1=0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{6}$

代 p

3. 某训练卷 2.



小线段转大线段

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$，$S_{\triangle ODE} = S$，$S_{DEF_2F_1} = f(S)$，写 $f(S)$

（蝴蝶模型转化）

设 DF_1：$x = my-1$. 联立：$(8m^2+9)-16my-64=0$

Vieta $\begin{cases} y_1+y_2 = \frac{16m}{8m^2+9} \\ y_1y_2 = \frac{-64}{8m^2+9}. \end{cases}$

$f(S) = 2S + S\left(\frac{DF_1}{EF_2} + \frac{EF_2}{DF_1}\right)$

$= 2S + S\left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1}\right)$，Vieta 代入

再找一个等式关系，变一个大面积，$2f(S) = 2S_{\triangle DF_2E'}$

$= 2 \times \frac{1}{2}|F_1F_2| \times |y_1-y_2|$

小面积转大面积

代入得 S 与 t 关系.

3 得.

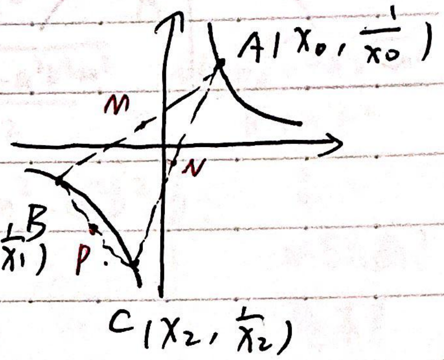
Campus

No.
Date

一个运算优化

$\triangle ABC$ 内接于等轴双曲线 $x^2-y^2=2$ ①问其垂心轨迹.
②考虑其3边中点的外接圆 与原点回共 （九点圆）???
③特殊. 有关于原点对称的2个点住, → 用第二定义直接变即可.

①为简化运算. 将双曲线旋转为反比例函数 $xy=1$.
得到垂心坐标. 考虑同构



$$K_{AC}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_2}}{x_0-x_2}=\frac{\frac{x_2-x_0}{x_0x_2}}{x_0-x_2}=-\frac{1}{x_0x_2}.$$

过B垂线: $y=x_0x_2(x-x_1)+\frac{1}{x_1}=x_0x_2x+\frac{1}{x_1}-x_0x_1x_2$

过C垂线: $y=x_0x_1(x-x_2)+\frac{1}{x_2}=x_0x_1x+\frac{1}{x_2}-x_0x_1x_2$.

相交: $x_0x_2x-x_0x_1x=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$

$=(x_2-x_1)x_0x$

$\Rightarrow x_0x=\frac{-1}{x_1x_2}\Rightarrow x=\frac{-1}{x_0x_1x_2}\Rightarrow$ 垂心 $\left(-\frac{1}{x_0x_1x_2},-x_0x_1x_2\right)$ 即得

② $\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}}{2}\right)$ $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right)$ $\left(\frac{x_2+x_0}{2},\frac{\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_0}}{2}\right)$

①.求圆心坐标. 过AC中垂线. $y=x_0x_2\left(x-\frac{x_0+x_2}{2}\right)+\frac{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_2}}{2}$

BC中垂线: $y=x_1x_2\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$

$\Rightarrow$ 坐标: $\left(\frac{1}{2x_0x_1x_2}+\frac{x_0+x_1+x_2}{2},\ \cancel{\frac{x_0x_1x_2+\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}}\right)$ (九点圆圆心)

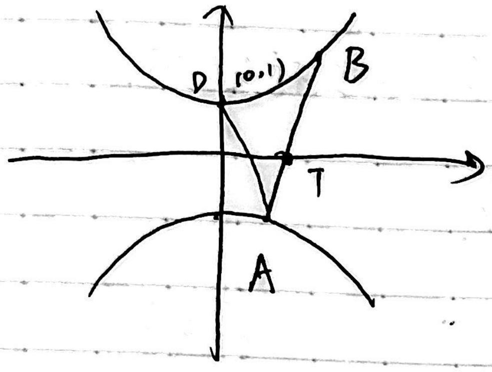
not AC, BC 是中位线中垂.

→ 好法. 用到角证 $\angle MON+\angle MPN=\pi$.

↓

斜率用"垂径定理"去算即可 (双曲)

(一个定角结论：2404 NB二模)



$y^2-x^2=1$ D(0,1) B($\sqrt{3}$,2)

l: AB. ∩ x轴 = T.

则 $\angle ADT=\frac{\pi}{6}$ (定角) (到角)

求法，利用 l 中 $\alpha+\beta$ only related to x_t.

去推 $tg(\alpha+\beta)=k_{DT}$ (弃拙成巧.)

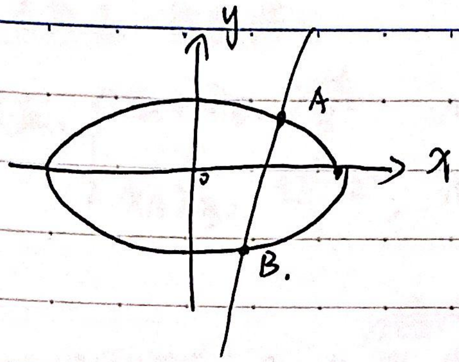
↓

参数值最后代

No.

Date

椭圆中的弦



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $y=kx+m$.（用含去k不存在）

$\rightarrow |AB|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}\cdot|2ab|}{b^2+a^2k^2}$

$S_{\triangle AOB}=\frac{m}{根}\cdot\frac{|ab|\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{a^2k^2+b^2}=\frac{|m|ab\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}$

m主元函？

是不？

$= ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2k^2+b^2}-\left(\frac{m^2}{a^2k^2+b^2}\right)^2}$

（配方）

① $OA\perp OB$. 考虑 $d^{O}_{AB}=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$.

$b^2x^2+a^2(kx+m)^2=a^2b^2$. $(b^2+a^2k^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$.

$\frac{kx_1+m}{x_1}\cdot\frac{kx_2+m}{x_2}=-1 \Rightarrow (a^2+b^2)m^2=(k^2+1)a^2b^2$.

$\Rightarrow d^{O}_{AB}$ 定值.

→ 三角代换会更 Clear.

② 考虑 $S_{\triangle AOB}$ 的叉乘形式.（Cauchy 不等式）

$\left(\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_B^2}{a^2}+\frac{(-y_B)^2}{(-b)^2}\right)\geq\left(\frac{x_By_A-x_Ay_B}{ab}\right)^2$; 取等条件.

③ 对于所有的情况，$S_{\triangle AOB}\,max$ 即为 $\frac{1}{2}ab$.

④ 考虑已知 $|AB|=l$，分析 $S_{\triangle AOB}$ 的取值情况 $\sqrt{2}a$，$\sqrt{2}b$.

⑤ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab \Rightarrow k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{b^2}{a^2}$.（面积定则斜率积定）

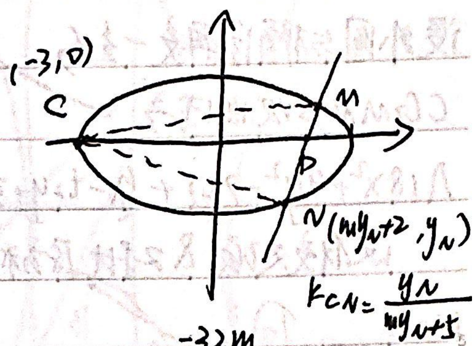
椭圆中的升华.参根变,双韦达.

①.用切线方程 推切点弦方程

②(24.11 T8联考 T(18)): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

$C(-3,0)$ $D(2,0)$ 过D动直线交椭圆于M,N.

$\triangle CMN$外心Q. 问 $k_{OQ}\cdot k_{MN}$?



方法一:(JK):参根变换解同构

$MN: x=my+2$. 联立:$(8m^2+9)y^2+32my-40=0$. $\Rightarrow \begin{cases} y_M+y_N=\frac{-32m}{8m^2+9} \\ y_My_N=\frac{-40}{8m^2+9} \end{cases}$

CN中垂线: $y=\frac{-(my_N+5)}{y_N}\left(x-\frac{my_N-1}{2}\right)+\frac{y_N}{2}$

CM中垂线: $y=\frac{-(my_M+5)}{y_M}\left(x-\frac{my_M-1}{2}\right)+\frac{y_M}{2}$.

↓表: $Q(x_Q,y_Q)$

$\Rightarrow y_Q=\frac{-(my+5)}{y}\left(x_Q-\frac{my-1}{2}\right)+\frac{y}{2}$, y_M, y_N为两根.

双韦达.
(link: 一线与多线同曲联立,双韦达)
↓
(2006湖南理)

注:若遇2502武汉二调: y_N, y_M 还有 x_N, x_M, even 交叉项, 那就还是作差.

方法二: XK, 第2次(同构): CMN外圆, CMN外椭圆.

刻画外心: ~~到两线等距(两中垂等距)~~ 到三个顶点等距.

$Q(x_0,y_0)$ $(x_0+3)^2+y_0^2=(x_0-x_M)^2+(y_0-y_M)^2$

$\Rightarrow 6x_0+9=x_M^2-2x_0x_M+y_M^2-2y_0y_M$.

同理. $6x_0+9=x_N^2-2x_0x_N+y_N^2-2y_0y_N$

$x_M, x_N\to my+2$. 韦达证明. 一样升华.

类似作差, 但更清晰

方法三：CT法曲线系。

设外圆与椭圆再交一点G $\rightarrow$ 两直线

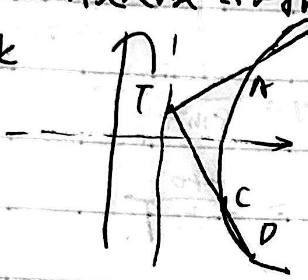
CGMN二次曲线系。

$$\lambda(18x^2+9y^2-72)+(x-t_2y+3)(x-t_1y-2)=0.$$

$\rightarrow$ 两条线，因为已知过定点

没有交叉项 & x 提出 TG 方程

link



$|TA||TB|=|TC||TD|$（等方，类似于向量加减）

方法四：XD优化：代二次曲线。

$$y=\frac{-(x_1+3)}{y_1}x+\frac{x_1^2-9}{2y_1},\ 而\ x_1^2-9=-\frac{9}{8}y_1^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5}{y_2}-\frac{5}{y_1}\right)x=\frac{y_1-y_2}{16}\ \rightarrow x_Q=\frac{y_1y_2}{80}.$$

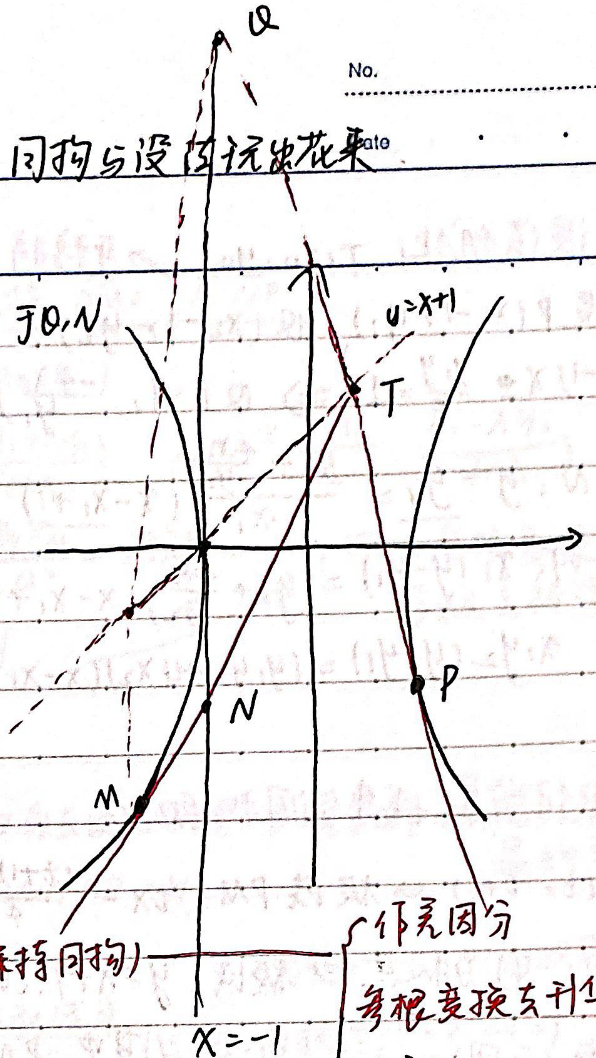
2502武汉二调解12、一道调和点列怎么用同构与设应玩出花来

T,P(2,1), 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

T在 $y=x+1$ 上，两切点 P, M，TP, TM 交 $x=-1$ 于 Q, N

证 PN 与 MQ 交点在定直线上

(先猜 $y=x+1$)



一. 不带感情硬来

设 $T(x_0,y_0)$ $P(x_1,y_1)$ $M(x_2,y_2)$.

$PQ:\ x_1x-\frac{y_1y}{4}=1 \Rightarrow Q\left(-1,-\frac{4}{y_1}(1+x_1)\right)$

$\Rightarrow MQ:\ y=\frac{y_2+\frac{4}{y_1}(1+x_1)}{x_2+1}(x-x_2)+y_2$.

同理：$PN:\ y=\frac{y_1+\frac{4}{y_2}(1+x_2)}{x_1+1}(x-x_1)+y_1$ (二者保持同构)

作完因分

参根变换去升华

均可.

求交点：相减(联立)

CT: 保留 x, y 用，消 x_t, y_t (参)

$$\begin{cases} y_1(x_2+1)(y-y_2)=[y_1y_2+4x_1+4](x-x_2) \\ y_2(x_1+1)(y-y_1)=[y_1y_2+4x_2+4](x-x_1) \end{cases} \Rightarrow 减:$$

$$(x_2y_1-x_1y_2+y_1-y_2)y+\cancel{y_1y_2(x_1-x_2)}=4(x_1-x_2)x+\cancel{y_1y_2(x_1-x_2)}-4(x_1-x_2)$$

又：$y_1=\frac{4}{y_0}(x_0x_1-1)$, $y_2=\frac{4}{y_0}(x_0x_2-1)$ (用切线方程去代) → 不然T设了白设用

$\Rightarrow x_2y_1-x_1y_2+y_1-y_2=\frac{4x_0}{y_0}(x_1-x_2)+\frac{4}{y_0}(x_1-x_2)$. ，结合 $y_0=x_0+1$

$\Rightarrow$ ~~得~~ $y=x+1$.

No.

Date

二. 设法优化 $T(x_0, y_0)$ 平移掉. 也有点从T的极点去猜的feel.

设 $P(x_1-1, y_1)$ $Q(x_2-1, y_2)$

$(x_1-1)x - \frac{y_1 y}{4} = 1 \Rightarrow Q(-1, \frac{-4x_1}{y_1})$ $N(-1, \frac{-4x_2}{y_2})$.

$PN: y - y_1 = \frac{y_1 + \frac{4x_2}{y_2}}{x_1}(x - x_1 + 1)$ 要用这个点. 便简单).

即: $x_1(y - y_1) = (y_1 + \frac{4x_2}{y_2})(x - x_1 + 1)$

$x_1 y_2 (y - y_1) = (y_1 y_2 + 4x_2)(x - x_1 + 1)$. 后略.

三: 几何背景. 线束与调和, 配极. 直线系.

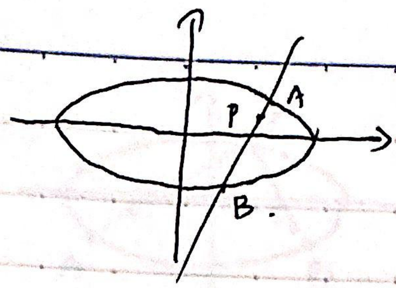
$T(t, t+1) \Rightarrow$ 极线 $PM: tx - \frac{(t+1)y}{4} = 1 \Rightarrow t(x - \frac{y}{4}) - \frac{y}{4} - 1 = 0.$ ∴ 恒过 $(-1, -4)$

$H(-1, -4)$ 为极点 $\Rightarrow$ 极线: $y = x + 1$. (即: TG) [完全四边形]

(其中: $PN \cap MQ = S$, $TS \cap MP = G$)

选点 (反用)

关于配极



$\vec{AP}=\lambda\vec{PB}$，找 $\vec{AM}=-\lambda\vec{MB}$.

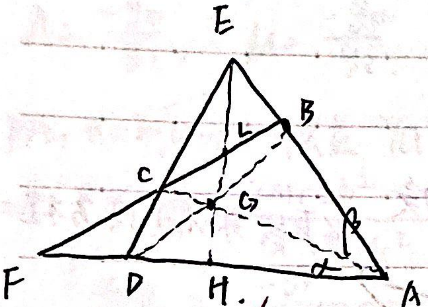
$A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$

$\Rightarrow P\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$　$M\left(\frac{x_1-\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1-\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

则定比点关系. $\frac{x_Px_M}{a^2}+\frac{y_Py_M}{b^2}=1$.（可以参极点极线 作极点极线）

P极点 $\Rightarrow \frac{x_Px}{a^2}+\frac{y_Py}{b^2}=1$

[完全四边形中的调和点列性质]



任意三线不共点的四条直线与6个交点 $\Rightarrow$ 完全四边形（最近很 最初考到问）

$AC\cap BD=G$，$EG\cap AD=H$.

有：ADHF调和.

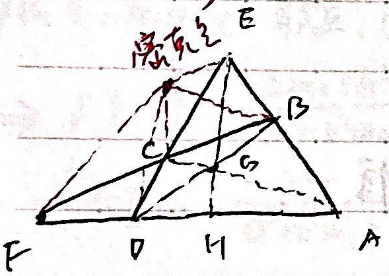
E－ADHF调和线束

$\Rightarrow$ BCLF调和

（用那个比例去写两线段比）

交比，面积法（link 24.01 22期末）（正弦定理）

（武汉二调）



证法：①2次梅涅劳斯

$\triangle EBD\rightarrow CA$

$\triangle DCA\rightarrow EH$.

②面积法

$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}|AD||AE|\sin(\alpha+\beta)$ → "第2次"，那道前分成

$=\frac{1}{2}|AD||AC|\sin\alpha+\frac{1}{2}|AC||AE|\sin\beta$

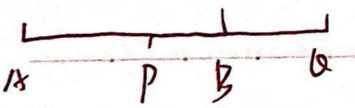
$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|AC|}=\frac{\sin\alpha}{|AE|}+\frac{\sin\beta}{|AD|}$ ①（张角定理）

完四L

$\triangle ABF$：$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|AC|}=\frac{\sin\alpha}{|AB|}+\frac{\sin\beta}{|AF|}$ ②

$\triangle ABD$：$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|AG|}=\frac{\sin\alpha}{|AB|}+\frac{\sin\beta}{|AD|}$ ③

（调和H）$\triangle AEH$：$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|AG|}=\frac{\sin\alpha}{|AE|}+\frac{\sin\beta}{|AH|}$ ④.



$\frac{PB}{AP}=\frac{QB}{AQ}$（取倒）

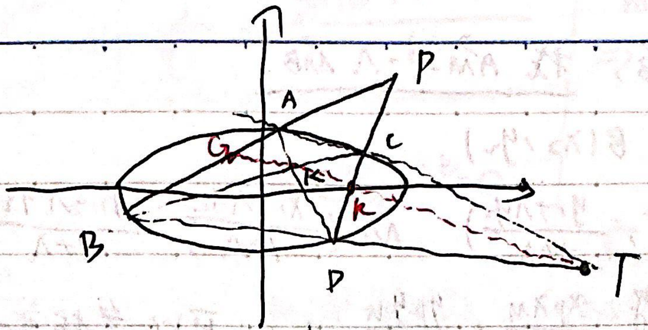
$\frac{AB-AP}{AP}=\frac{AQ-AB}{AQ}$.

① − ② + ③ − ④

即：$\frac{1}{AF}+\frac{1}{AH}=\frac{2}{AD}$（调和）

No.

Date



P极 → KT极

K极 → PT极

T极 → KP极

(自极三角形，舒马赫—勒姆科尔作法作切线)

完全四边形在这里

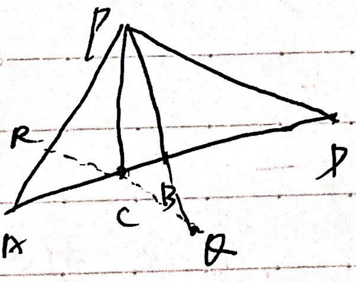
PQ调和分割AB
PR调和分割CD → 写2个方程（极线方程）

$$\frac{x_P x_Q}{a^2}+\frac{y_P y_Q}{b^2}=1$$

$$\frac{x_P x_R}{a^2}+\frac{y_P y_R}{b^2}=1$$

$\xrightarrow{\text{坐标交换}}$ KT出来极线方程

也：



PA PB PC PD 调线

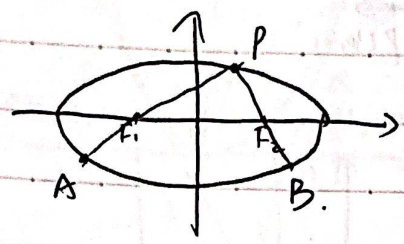
$\begin{cases} CQ \parallel PD \\ C\text{为}RQ\text{中点} \end{cases}$ → 知二推一.

No.

Date

关于配极,定比点差与常规方法算理的整理

一、



$\vec{PF_1}=\lambda\vec{F_1A}$，$\vec{PF_2}=\mu\vec{F_2B}$. 则 $\lambda+\mu=2\cdot\frac{1+e^2}{1-e^2}$.

$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2 \Rightarrow x_0^2=\frac{a^2(b^2-y_0^2)}{b^2}$.

证明：法一：定比点差. $P(x_0,y_0)$ $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

代入定比分点与F_1,F_2，根据x_0到λ量关系（比对系数）.

法二：算理

$\lambda=\frac{-y_0}{y_1}$，$\mu=\frac{-y_0}{y_2}$. 即证 $y_0\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=\frac{2+2e^2}{e^2-1}$.

PA: $x=m_1y-c$. 联立：$(a^2+b^2m_1^2)y^2-2m_1cb^2y-b^4=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_0+y_1=\frac{2m_1cb^2}{a^2+b^2m_1^2} \\ y_0y_1=\frac{-b^4}{a^2+b^2m_1^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y_1}=\frac{y_0(a^2+b^2m_1^2)}{-b^4}$$

$\frac{1}{m_1}=\frac{y_0}{x_0+c} \Rightarrow m_1=\frac{x_0+c}{y_0}$

PB: $x=m_2y+c$. 联立：$(a^2+b^2m_2^2)y^2+2m_2cb^2y-b^4=0$.

$$\Rightarrow\begin{cases} y_0+y_2=\frac{-2m_2cb^2}{a^2+b^2m_2^2} \\ y_0y_2=\frac{-b^4}{a^2+b^2m_2^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y_2}=\frac{y_0(a^2+b^2m_2^2)}{-b^4}$$

$\frac{1}{m_2}=\frac{y_0}{x_0-c} \Rightarrow m_2=\frac{x_0-c}{y_0}$.

$\Rightarrow m_1^2+m_2^2=\frac{2x_0^2+2c^2}{y_0^2}=\frac{\frac{2a^2}{b^2}(b^2-y_0^2)+2c^2}{y_0^2}$

$$\Rightarrow y_0\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=\frac{y_0^2[2a^2+b^2(m_1^2+m_2^2)]}{-b^4}=\frac{y_0^2\left[2a^2+\frac{2a^2b^2-2a^2y_0^2+2b^2c^2}{y_0^2}\right]}{-b^4}$$

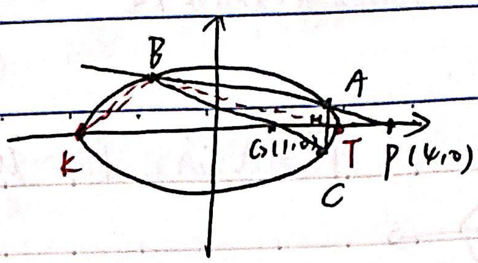
$$=\frac{2a^2y_0^2+2a^2b^2-2a^2y_0^2+2b^2c^2}{-b^4}$$

即证.

No.

Date

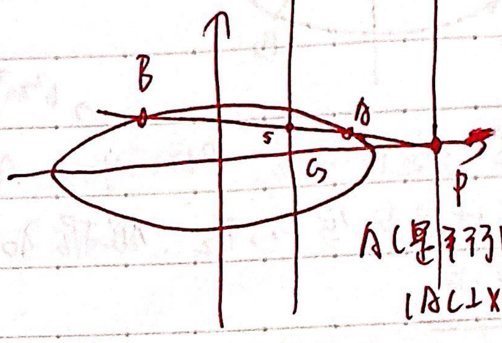
二. 2025届3月宁波十校



$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

①.证明H为AC中点

②若A在BP上，问$\frac{S_{\triangle GCP}}{S_{\triangle GBP}}$的取值范围.



A(是平行线，AB,SP调和

(AC⊥x轴)

解.①(考场为3用配极写的定比点差)

由梅涅劳斯定理. $\frac{AH}{HC}=\frac{AP}{PB}\times\frac{GB}{GC}$.

设$\vec{AP}=\lambda\vec{PB}$，$\vec{GB}=\mu\vec{GC}$. 最后可解得$\lambda\mu=-1$.(考虑方向). 故H为AC中点.

算理. B是那个"关键点" → 联立有效点造对称，寻找关键点定不对称算理.

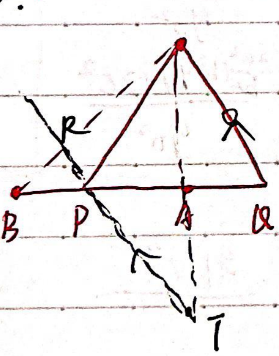
$A(x_1,y_1)$ $C(x_2,y_2)$ $B(x_0,y_0)$

AB: $x=my+4$. 联立. $(m^2+2)y^2+8my+12=0 \Rightarrow y_0y_1=\frac{12}{m^2+2} \Rightarrow y_1=\frac{12}{y_0(m^2+2)}$

BG: $x=ny+1$. 联立，$(n^2+2)y^2+2ny-3=0 \Rightarrow y_0y_3=\frac{-3}{n^2+2} \Rightarrow y_3=\frac{-3}{y_0(n^2+2)}$

$\frac{|AH|}{|AC|}=\frac{y_1}{y_3}$，用二次曲线代. 即得.

②背景. 调和点列与配极.



AB调和分割PQ. 则: $\frac{PA}{AQ}=\frac{PB}{BQ}$，过P作平行线

则P为TR中点.

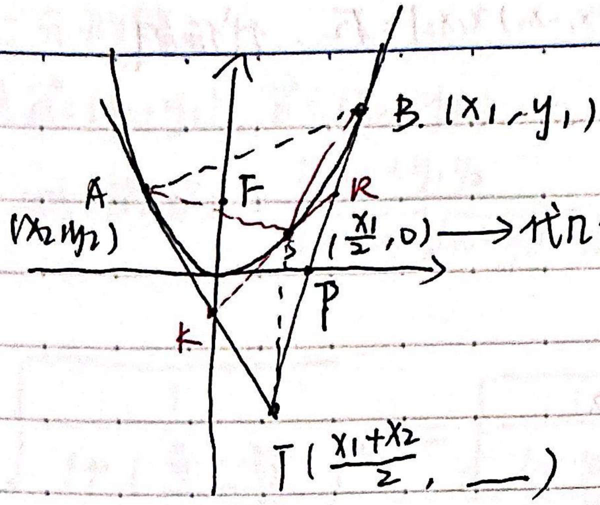
此问中. PG调和分割KT. ~~B为调和未来除~~

(~~这题是答出来的. 不值~~ 得思考)

② $\frac{|GC|}{|GB|}$ range. 即 $-\frac{y_C}{y_B}=-\frac{y_3}{y_0}=\cancel{\frac{3}{y_0^2(n^2+2)}}$ 构造. $\frac{y_3}{y_0}+\frac{y_0}{y_3}$ (对勾函数)

Date

阿基米德△结论拓展.



且由斜率来秋 $FP \perp BT$（可以找到一个四点共圆）.

且 $\frac{S_{\triangle ABS}}{S_{\triangle KRT}} = 2$（切点△与切线△）（例比例.（2022.5 精试））

x_S ✓ $\Rightarrow x_R = \frac{x_1+x_S}{2}$, $x_K = \frac{x_2+x_S}{2}$, 则边比例分b.

用大减小，（设△RST为基准）

（2404 武汉四调）（算法严谨，过程与优化）.

$y=x^2$, $T(1,2)$ 过T直线交抛于A、B. A,B处切线为 l_1, l_2, $l_1 \cap x$轴 $=M$,

$l_2 \cap x$轴 $=N$, $l_1 \cap l_2 = P$.

(1). 点P定直线上? → 配极 → 今分　　↗ 优化算法.

(2). $S_{\triangle PMN} = \sqrt{2}$, P?（费法：斜率同构，但是漏了绝对值导致不严谨，漏解）

(3) PMNT四共，P?（套上面的结论）

析(1). $y=x^2 \Rightarrow y'=2x$. 设 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $P(x_p,y_p)$.

$\Rightarrow$ A处: $y=2x_1(x-x_1)+x_1^2$ $= 2x_1x - x_1^2$. B处 $y=2x_2(x-x_2)+x_2^2$ $= 2x_2x - x_2^2$. $\Rightarrow x_p = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_p = x_1x_2$

再设AB $y=k(x-1)+2$. 联立韦达. $x_1+x_2=k$, $x_1x_2=k-2$. $\Rightarrow x_p = \frac{k}{2}$, $y_p = k-2$ $\Rightarrow$ 方程

(2)（费法）（斜率同构）

$M(t, 2t-2)$. 线: $y=k_i(x-t)+2t-2$. 联立 $\Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2 = 8t-8 \\ k_1k_2 = 4t \\ |k_1-k_2| = 4\sqrt{t^2-2t+2} \end{cases}$ [数形统一]

带绝值

$M(\frac{2-2t}{k_1}+t, 0)$ $N(\frac{2-2t}{k_2}+t, 0)$

$|MN| = |\frac{2-2t}{k_1} - \frac{2-2t}{k_2}|$

化简得: $|t-1|\sqrt{t^2-2t+2} = \sqrt{2}$ → 两解，易忽略（事实上关于 $x=1$ 对称）

KOKUYO

No.

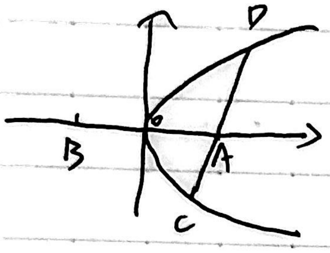
Date

(1标法). $M(\frac{x_1}{2},0)$ $N(\frac{x_2}{2},0)$ $\Rightarrow S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}|(x_1-x_2)x_1x_2|=\sqrt{2}$. 代值解.

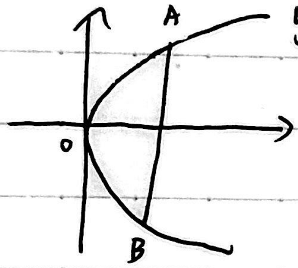
(3) PF直径. P线段交点即得.

(2025年. 22级成都三诊)

0. 2个结论速记

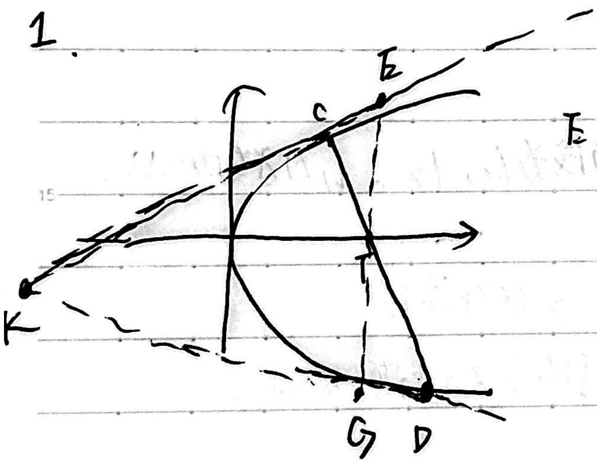


$|OA|=|OB|$, 则 $k_{BD}+k_{BC}=0$.



$OA\perp OB \Rightarrow AB$过$(2p,0)$ 4倍
焦点$(\frac{p}{2},0)$

1.



E, G交在切线上. 则 $|TE|=|TG|$.

$l_{CD}: x=my+t$. 联立. $y^2=2pmy+2pt$

$\Rightarrow \begin{cases} y_C+y_D=2pm \\ y_Cy_D=-2pt \end{cases}$

切C: $y_Cy=p(my_C+t+x)$.

$\Rightarrow y_E=\frac{p(my_C+2t)}{y_C}$.

$y_G=\frac{p(my_D+2t)}{y_D}$. $\Rightarrow \checkmark$

关于Cauchy，向量夹角与三角统一的理解

一、二元形式

设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$.

则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\sqrt{\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)^2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}}=\sqrt{\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)^2}{(x_1x_2+y_1y_2)^2+\underbrace{(x_1y_2-x_2y_1)^2}_{\text{交叉项含取子}}}}$

↳ 用Lagrange恒等式(两元)

$$=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\dfrac{\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}}{1+\frac{x_1x_2}{y_1y_2}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}}$$

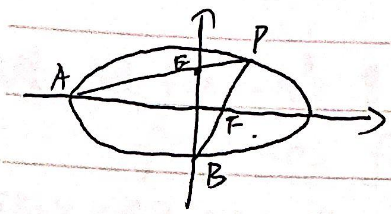
↳ 到角公式.

No.

Date

一个小二级，练练运算

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 证 $S_{ABFE}=ab$.



解：设 $P(x_0,y_0)$ 则 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$

$A(-a,0)\ P(x_0,y_0) \Rightarrow E: \frac{y_0}{x_0+a}=\frac{y_E}{a} \Rightarrow y_E=\frac{ay_0}{x_0+a}$.

$B(0,-b)\ P(x_0,y_0) \Rightarrow F: \frac{y_0+b}{x_0}=\frac{b}{x_F} \Rightarrow x_F=\frac{bx_0}{y_0+b}$.

$\because S_{ABFB}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{bx_0}{y_0+b}+a\right)\left(\frac{ay_0}{x_0+a}+b\right)=\frac{(bx_0+ay_0+ab)^2}{2(y_0+b)(x_0+a)}$

铭记心中.

$$=\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2+a^2b^2+2abx_0y_0+2ab^2x_0+2a^2by_0}{2(y_0+b)(x_0+a)}$$

$$=\frac{2a^2b^2+2abx_0y_0+2ab^2x_0+2a^2by_0}{2(y_0+b)(x_0+a)}$$

→保留形式，提公因式.

$$=\frac{2ab(ab+x_0y_0+bx_0+ay_0)}{2(y_0+b)(x_0+a)}=ab.$$

曲线渐近线(from XBB)

湿三校，曲线 C：$x^3-xy-y^3=1$.（(12)中已证 ρ ~~[illegible]~~ 函数扩）

求所有实数 k, m 使得 $y=kx+m$ 在 C 上方

标答：设 $f(x)=x^3-qx-q^3-1$.　$f(y)=x^3-xy-y^3-1$.

$f(q)<0$，$f(q+2)>0$.

所以对于 C 上一点 (p,q)，恒有 $q<p<q+2$.

所以 C 图象夹在 $y=x$，$y=x+2$ 之间，故 $k=1$.

再代 $y=x+m$，解 m：$(3m+1)x^2+(3m^2+m)x+m^3+1>0$.

（联立）．$m=-\frac{1}{3}$ 不行

$m\neq-\frac{1}{3}$　$\Delta=(3m+1)\dfrac{(-m^3+m^2-4)}{5}$.

XBB："如果一条曲线有渐进线，怎么求？"

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b=\lim_{x\to+\infty}b.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0.$$

$\Rightarrow k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.　$\dfrac{f(x)}{x}$ 即 $\dfrac{y}{x}$.

$x^3-xy-y^3=1$ 即：$1-\left(\frac{y}{x}\right)^3-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^3}$

~~对等取~~

两边取极限 $\Rightarrow k=1$，从而解 b.

解几自查

1. 截距为0：$y=kx$ （截距相等：$x+y=t$）.

2. 斜率存不存在

3. 正弦定理的应用

4. 圆中的弦长与弦心距

5. 圆的弧长 → 角度比

6. 外接圆 ⟶ 正弦定理 ⊕⊕⊕

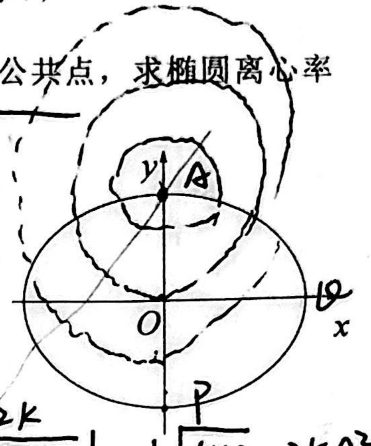
7. 内切圆：$S=\frac{1}{2}cr$

* $y^2=2px$，$(\frac{p}{2},0)$，要防一下想写"p"类的东西.（系数对应清楚！）

19．（本题满分 15 分）如图，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）.

（Ⅰ）求直线 $y=kx+1$ 被椭圆截得的线段长（用 a,k 表示）；

（Ⅱ）若任意以点 $A(0,1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点，求椭圆离心率的取值范围.



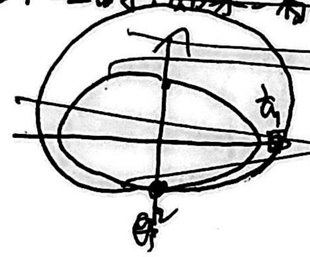
解：(1) 可知 $k\neq0$，又由于k存在，$l\neq2b=2$.（非竖直非水平线）

联立方程：$\frac{x^2}{a^2}+(kx+1)^2=1 \Rightarrow (\frac{1}{a^2}+k^2)x^2+2kx=0.$

$\therefore x_1=0$，$x_2=\frac{-2k}{k^2+\frac{1}{a^2}}$ $\therefore |x_1-x_2|=\left|\frac{2k}{k^2+\frac{1}{a^2}}\right|$ $\therefore l=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{2k}{k^2+\frac{1}{a^2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot 2ka^2}{a^2k^2+1}\right|$

(2). ~~当半径 $r<2$ 时，由图易知，2个交点.~~

~~当 $r=2$ 时，如果二者只有一个交点，不妨联立 $x^2+y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\ldots=1$~~



$a^2\le2$

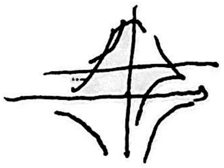
$\therefore e^2=\frac{a^2-1}{a^2}$ ~~$\frac12 \Rightarrow e=\frac{\sqrt2}{2}$~~ ~~$\frac{1}{a^2}+\ldots=3$~~

$0<a^2<2$

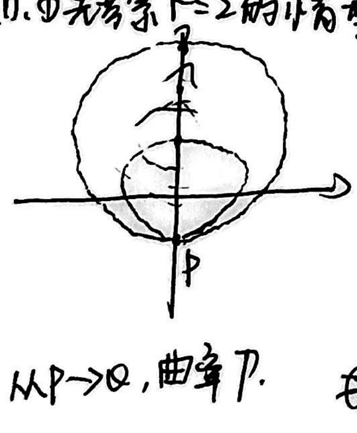
~~$=1-\frac{1}{a^2}\in(\frac12,1)$~~ $1-\frac{1}{a^2}\in(-\infty,\frac12)$

~~$0<\frac{1}{a^2}<\frac12$~~

~~$0<\frac12<1-\frac{1}{a^2}<1$~~



(2). ① 先考察 $r=2$ 的情况. ① 如果椭圆始终被"包含"在圆内，则至多 2个公共点.

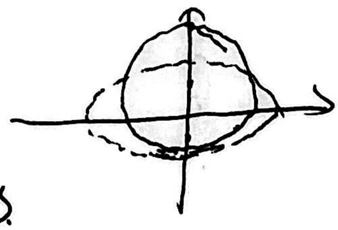


此情形下满足 P处曲率半径小于圆半径.

即：$a^2<2$. 即：$e^2=\frac{a^2-1}{a^2}=1-\frac{1}{a^2}<\frac12$ $\therefore$ ~~$e\in(\frac{\sqrt2}{2},1)$~~ 不成立.

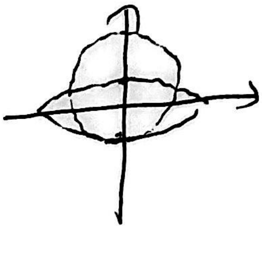
$e\in(0,\frac{\sqrt2}{2})$.

所以 $e>\frac{\sqrt2}{2}$，则如图.



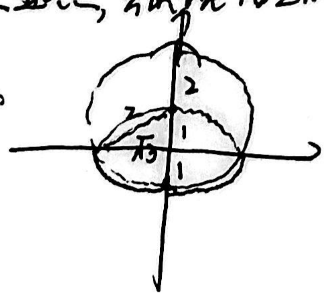
从 $P\to Q$，曲率↑.

~~② 如果~~



但显然，忽视圆之的情形

故，



$a=\sqrt3$ $b=1$ $c=\sqrt2$.

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt6}{3}$ ~~$\therefore e\in(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt6}{3}]$~~

$$\frac{k_1^2(1+k_1^2)}{(1+a^2k_1^2)^2} = \frac{k_2^2(1+k_2^2)}{(1+a^2k_2^2)^2}$$

$$(k_1^2+k_1^4)(a^4k_2^4+2a^2k_2^2+1) = (k_2^2+k_2^4)(a^4k_1^4+2a^2k_1^2+1)$$

$$\cancel{a^2k_2^2k_1\sqrt{1+k_1^2} + k_1\sqrt{1+k_1^2} = a^2k_1^2k_2\sqrt{1+k_2^2}} + k_2\sqrt{1+k_2^2}$$

$$a^4k_2^4k_1^2 + k_1^2 + 2a^2k_2^2k_1^4 + k_1^4 = a^4k_1^4k_2^2 + k_2^2 + 2a^2k_1^2k_2^4 + k_2^4$$

$$(a^2k_2^2+1)k_1\sqrt{1+k_1^2} = k_2\sqrt{1+k_2^2}(a^2k_1^2+1)$$

$$a^2k_2^2k_1\sqrt{1+k_1^2} + k_1\sqrt{1+k_1^2} = a^2k_1^2\overset{k_2}{}\sqrt{1+k_2^2} + k_2\sqrt{1+k_2^2}$$

$$ak_1k_2(k_2\sqrt{1+k_1^2} - k_1\sqrt{1+k_2^2}) = k_2\sqrt{1+k_2^2} - k_1\sqrt{1+k_1^2}$$

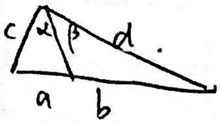
2025.1. 期末单选压轴整理，朝阳

椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $(a>b>0)$ 左右顶点 A_1, A_2. 左右焦点 F_1, F_2. M 为 C 上一点 且满足 $\angle A_1MA_2=\frac{2}{3}\pi$.

$$\frac{\sin\angle F_1MF_2}{\sin\angle A_1MF_1\,\sin\angle A_2MF_2}=80\sqrt{3}，问\ e.$$

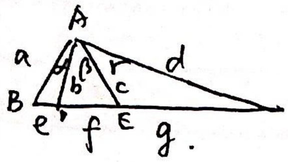
1. 考场上凭数感猜了5/6. 但选项配平和"3,4,5"最终选了5. 数题嘛…不好说的.

2. 猜了张角定理，但完全没写下去.（方向明明对了…）



由面积比. $\frac{a}{b}=\frac{c\sin\alpha}{d\sin\beta}$（也可以用相似）.

但如果边可以消掉

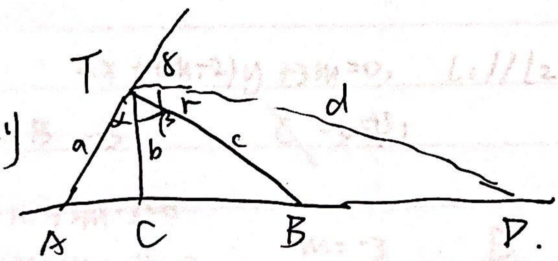


C $\cancel{\frac{S_{\triangle ADE}(中间)}{S_{\triangle ABC}(大)}}=$ → 多边张角乘，齐次化之后再去约 转化(用面积)

$$\frac{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{\frac{1}{2}bcad\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\frac{1}{2}abcd\ \sin\alpha\sin\gamma}=\frac{S_1\times S_2}{S_3\times S_4}$$ → 底边之比.

代 a, c. 全都有了.

link 调和点列



① $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$ → 用类似的面积法去转化. 知二求二.

② TC 内平分

③ TD 外平分

④ TC⊥TD

（比例用同一法反推）

①④ → ②③ ?

$AC\cdot DB=AD\cdot BC$.

$S_{\triangle ACT}\cdot S_{\triangle DBT}=S_{\triangle ADT}\cdot S_{\triangle BCT}$ 即 $\sin\alpha\sin\gamma=\sin\beta\sin$整个$=\sin\beta\sin\delta$，凑个90°. 补全角相等.

两道解几逻辑(底层)题 必要性与充分性→检验

3. 若圆 $C: x^2+y^2-2(m-1)x+2(m-1)y+2m^2-6m+4=0$ → 还是不是个圆

2 过坐标原点，则实数 m 的值为(C).

A. 2 或 1　　B. −2 或 −1

C. 2　　D. 1

3. $mx+y+1=0$,　$3x+(m+2)y+3m=0$,　$l_1 // l_2$,　m?　→ 还是不是同条线

A −1　　B −3　　~~C −3 或 1~~　　D −1 或 3

$\frac{m}{1}=\frac{3}{m+2} \Rightarrow m^2+2m-3=0$

$(m+3)(m-1)=0$　　$m=-3$　　B.

因分必然 只是一个 helper. 而硬实力强的话什么必不必然的

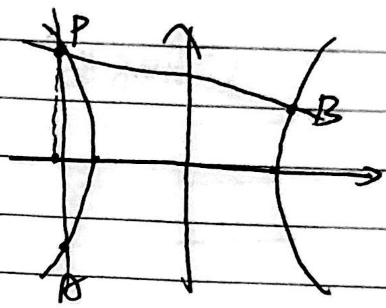
1. (12 分)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 经过点 $P(-2,1)$，且 C 的右顶点到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)过点 P 分别作两条直线 l_1,l_2 与 C 交于 A,B 两点(A,B 两点均不与点 P 重合)，设直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2. 若 $k_1+k_2=1$，试问直线 AB 是否经过定点？若经过定点，求出定点坐标；若不经过定点，请说明理由.

因式分解必然

解:(1). $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.



(2). ① 当AB斜率不存在，AB: $x=n$, $y^2=\frac{n^2}{2}-1$.

AB: $x=-4$

② AB斜率存在时，

设AB $y=kx+m$. 联立.

写 k_1+k_2, 代入化简:

$m^2+(2-6k)m+8k^2-2k-3=0$.

$y=k(x+4)+\underbrace{m-4k}_{定值}$. 分因式.

解12运算中的对偶式构造. 核心: $f(x_1)+f(x_2)$ 只依赖 x_1+x_2, x_1x_2.

例: 求证实变元 x,y 均 $\in[0,\frac12]$ 时,

$$\sqrt{x^2+(y-\tfrac12)^2}+\sqrt{x^2+(y+\tfrac12)^2}\le\frac{\sqrt5+1}{2}.$$

解: ①. 用放缩, $LHS\le\sqrt{(y-\frac12)^2+\frac14}+\sqrt{(y+\frac12)^2+\frac14}$.

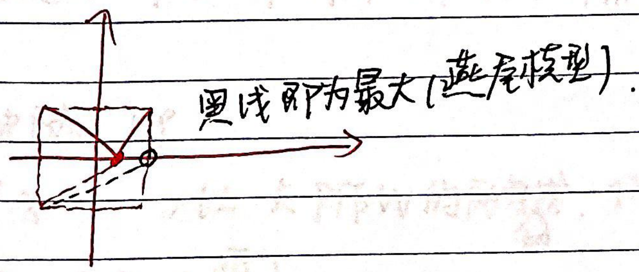
②. 两边平方, 可知所得式只依赖 $y-\frac12+y+\frac12=2y$, $(y-\frac12)(y+\frac12)=y^2-\frac14$ (想法).

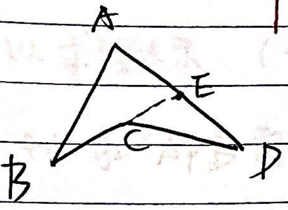
$$(y-\tfrac12)^2+(y+\tfrac12)^2+\frac24+2\sqrt{[(y-\tfrac12)^2+\tfrac14][(y+\tfrac12)^2+\tfrac14]}\le\frac{3+\sqrt5}{2}.$$

$$\Rightarrow (y-\tfrac12)^2+(y+\tfrac12)^2+2\sqrt{(y^2+\tfrac12-y)(y^2+\tfrac12+y)}\le\frac{2+\sqrt5}{2}.$$

$$\Rightarrow 2y^2+2\sqrt{(y^2+\tfrac12-y)(y^2+\tfrac12+y)}\le\frac{\sqrt5+1}{2}.$$ 亦可 [但实际运算过程中并不明显]

③几何法. $(y,0)\to(\frac12,\frac12)$, $(-\frac12,\frac12)$





到角公式

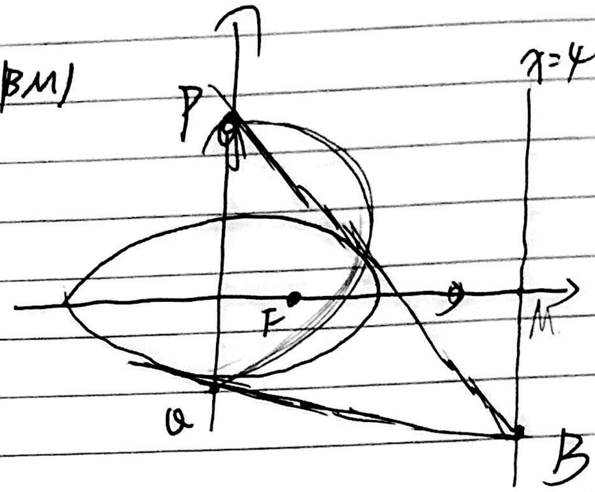
(南京盐城2024届一模) T18

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. $F(1,0)$ 右顶点 A $l: x=4$ 与 x 轴交于 M. ~~[illegible]~~

B 为 l 上的动点, 过 B 作 C 的两条切线. 分别交 y 轴于 P, Q

① 证明 BP, BF, BQ 斜率成等差

② $\odot N$ 经过 BPQ, 是否存在 B, 使 $\angle PNQ=\frac{\pi}{2}$? 若存在, 求 $|BM|$



①. 记 $B(4,y_0)$ 切线, $y=k(x-4)+y_0$. 代回椭圆方程

$(3+4k^2)x^2+8(y_0-4k)kx+4(y_0-4k)^2-12=0$.

$\Delta=0 \Rightarrow 12k^2-8y_0k+y_0^2-3=0$

$\Rightarrow k_1+k_2=\frac{8y_0}{12}$ ✓

$k_1k_2=\frac{y_0^2-3}{12}$

②. 由圆周角定理: $\angle PBQ=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\pi$; 结合到角公式 $\Rightarrow \sqrt{7}$.

(2024.成都七中月考) T19.

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. $l: x=-2$, 过一点 P 作 W 的两条切线, 切点 A, B , $\angle APB=60°$.

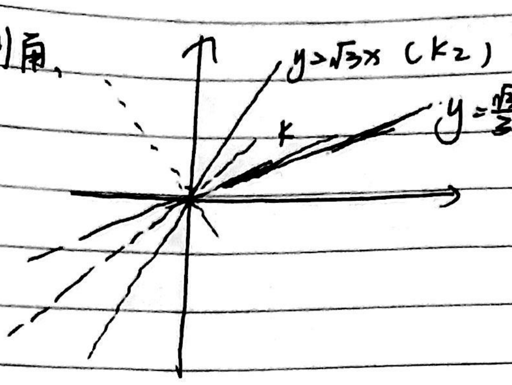
(1). 求 P 坐标 $(-2, \pm\frac{\sqrt{15}}{3})$ (还是倒角)

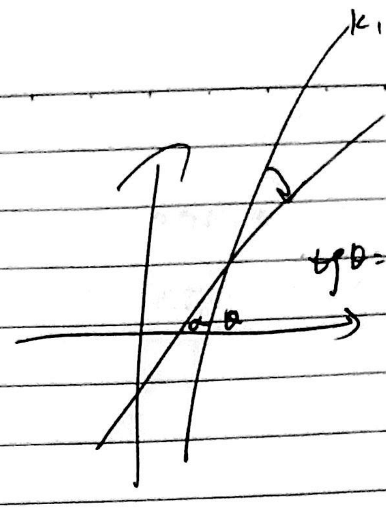
(2). 求 $\angle APB$ 角平分线与 x 轴交点 Q 坐标 $(-\frac{1}{3}, 0)$

解几中的到角公式. 逆时针旋转，不用带绝对值 (不翻译到对称)

eg: $y=\sqrt{3}x$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. ，求其夹中间线.

用到角，





$\tan\theta=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$,

$$\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k-k_2}{1+k_2k}.\qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-k}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}k}=\frac{k-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}+k-k-\sqrt{3}k^2=k+\frac{\sqrt{3}}{3}k^2-\sqrt{3}-k$$

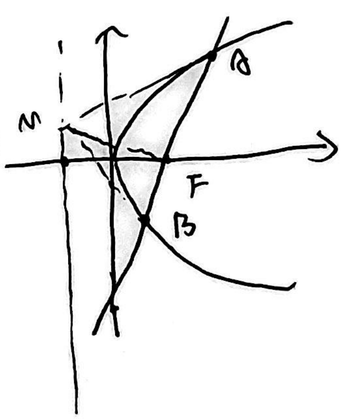
$\Rightarrow k^2=1$，然后要据图选.

斜率运算

*8.设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，点 M 在 阴三.
抛物线的准线上，O 为坐标原点，求证：

（1）直线 MA, MF, MB 的斜率成等差数列； $C:\frac{p}{2}$;

入 （2）当 $MA\perp MB$ 时，$\angle MFO=|\angle BMF-\angle AMF|$. $(y_1y_2=-p^2)$



解(1).证明:设 AB: $x=my+c$ $\Rightarrow y^2=2p(my+c)$.

$y^2-2pmy-2pc=0$. $A(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$ $B(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$.

$M(-\frac{p}{2},k)$ $F(\frac{p}{2},0)$. Vieta代即可.

(2). $k_{MA}\cdot k_{MB}=-1$ (到角公式) → 分子上用 ω 代.

$\Rightarrow 1=-k_{MA}k_{MB}$ → 分母1的代换

(2024 T8联考解几)(学习一下标答是怎么采分的)

已知双曲线 P 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，$B(-a,0),C(a,0)$，其中 $a>2$，$D(x_0,y_0)$（$x_0\ge a$，$y_0>0$）是双曲线上一点，直线 DB 与双曲线 P 的另一个交点为 E，直线 DC 与双曲线 P 的另一个交点为 F，双曲线 P 在点 E,F 处的两条切线记为 l_1,l_2，l_1 与 l_2 交于点 P，线段 DP 的中点为 G，设直线 DB,DC 的斜率分别为 k_1,k_2。

（1）证明：$4<\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\le\frac{4a}{\sqrt{a^2-4}}$；～渐近线

（2）求 $\frac{|GB|}{|GC|}$ 的值。$=1$

解(1). $k_1=\frac{y_0}{x_0+a}$，$k_2=\frac{y_0}{x_0-a}$ $\Rightarrow \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{2x_0}{y_0}$

$\frac{x_0^2}{4}-y_0^2=1$ $\Rightarrow \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{2x_0}{\sqrt{\frac{x_0^2}{4}-1}}=\frac{4}{\sqrt{1-\frac{4}{x_0^2}}}$

$x_0\ge a \Rightarrow \frac{4a}{\sqrt{a^2-4}}\ge\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}>4$

(2)设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，设直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_3,k_4。

故 l_1 的方程为 $y-y_1=k_3(x-x_1)$，

联立方程：$\begin{cases}y-y_1=k_3(x-x_1),\\x^2-4y^2=4,\end{cases}$

由 $\Delta=0$ 得 $k_3=\frac{x_1}{4y_1}$，………………… 8分

同理可得 $k_4=\frac{x_2}{4y_2}$，………………… 9分

联立 l_1,l_2 的方程：$\begin{cases}y-y_1=k_3(x-x_1),\\y-y_2=k_4(x-x_2),\end{cases}$

消去 y，可得 $x_P=\frac{y_2-y_1+k_3x_1-k_4x_2}{k_3-k_4}$，

………………………………………… 10分

将 k_3,k_4 表达式代入方程，

化简整理可得 $x_P=\frac{4y_2-4y_1}{x_1y_2-x_2y_1}$，……… 11分

设直线 DB 的方程为：$x=t_1y-a$，直线 DF 的方程为：$x=t_2y+a$，

则 $t_1=\frac{1}{k_1}=\frac{x_0+a}{y_0}$，$t_2=\frac{1}{k_2}=\frac{x_0-a}{y_0}$，

联立 DB 的方程与双曲线的方程：

$\begin{cases}x=t_1y-a,\\x^2-4y^2=4,\end{cases}$ 消去 x，可得关于 y 的二次方程：

$(t_1^2-4)y^2-2t_1ay+a^2-4=0$，该方程两根为 y_0,y_1。

由韦达定理可知：$y_0y_1=\frac{a^2-4}{t_1^2-4}\Rightarrow$

$y_1=\frac{a^2-4}{(t_1^2-4)y_0}$，

同理可得 $y_2=\frac{a^2-4}{(t_2^2-4)y_0}$，………………… 13分

$\therefore x_P=\frac{4y_2-4y_1}{x_1y_2-x_2y_1}=\frac{4(y_2-y_1)}{(t_1-t_2)y_1y_2-a(y_1+y_2)}$，

将 y_1,y_2 表达式代入 x_P 中，化简整理，得

$x_P=\frac{4(y_2-y_1)}{(t_1-t_2)y_1y_2-a(y_1+y_2)}$

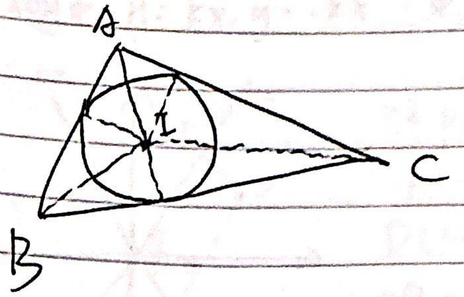
$=\frac{4y_0(t_1^2-t_2^2)}{(a^2-4)(t_1-t_2)-ay_0(t_1^2+t_2^2-8)}$，

再将 $t_1=\frac{x_0+a}{y_0}$，$t_2=\frac{x_0-a}{y_0}$ 代入上式，化简整理，可得 $x_P=\frac{8x_0}{4y_0^2-x_0^2-4}=\frac{8x_0}{-8}=-x_0$。

$\therefore$ 点 G 的横坐标 $x_G=\frac{x_0+x_P}{2}=0$，$\therefore OG\perp BC$，故 $|GB|=|GC|$。

$\therefore\frac{|GB|}{|GC|}=1$。………………………… 17分

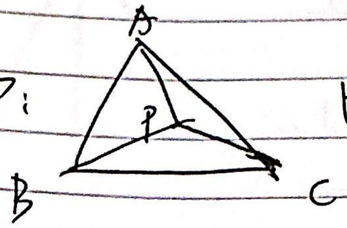
奔驰定理与内心坐标公式推导



$S_{\triangle AIB}:S_{\triangle BIC}:S_{\triangle ACI}=|AB|:|BC|:|CA|$

$=|c|:|a|:|b|$.

而：



∵P在内：$S_{\triangle PBC}\cdot\vec{PA}+S_{\triangle PAC}\cdot\vec{PB}+S_{\triangle PBA}\cdot\vec{PC}=\vec{0}$

∴对于内心：$a\vec{PA}+b\cdot\vec{PB}+c\vec{PC}=\vec{0}$.

证明.

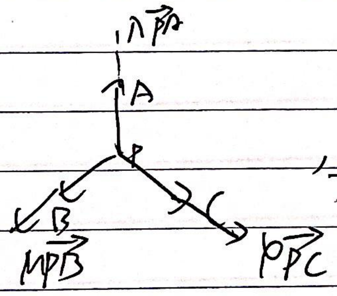
错误示范：$S_{\triangle PBC}=\vec{PB}\cdot\vec{PC}\sin\theta$ ⇒

$\vec{PB}\cdot\vec{PC}\sin\theta_1\cdot\vec{PA}+\vec{PA}\cdot\vec{PC}\sin\theta_2\cdot\vec{PB}+\vec{PB}\cdot\vec{PA}\sin\theta_3\cdot\vec{PC}=0$

X ⇒ $\vec{PA}\cdot\vec{PB}\cdot\vec{PC}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3)=0$

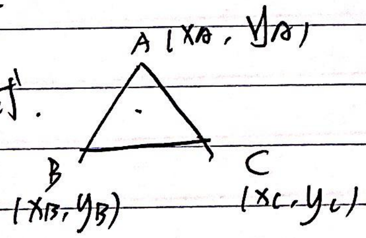
数乘向量，不能乱分配 乱换序！

正确，



P为A'B'C'的重心，结合鸟头模型

内心坐标公式.



$a(x_I-x_A,y_I-y_A)+b(x_I-x_B,y_I-y_B)+c(x_I-x_C,y_I-y_C)=\vec{0}$

$$\begin{cases} ax_I-ax_A+bx_I-bx_B+cx_I-cx_C=0 \\ ay_I-ay_A+by_I-by_B+cy_I-cy_C=0 \end{cases}$$

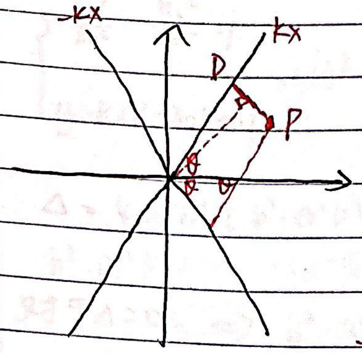
$\Rightarrow x_I=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$, $y_I=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$.

p(m,n)

kxy=0

解几二阶

1. xOy中，$y=kx$，$y=-kx$. 点P，S平=t. 问P轨



解. P(m,n). DP: $y=-k(x-m)+n$.

$-kx+km+n=kx \Rightarrow 2kx=km+n \Rightarrow x_D=\frac{km+n}{2k}$.

$D\left(\frac{km+n}{2k},\ \frac{km+n}{2}\right)$

$OD=\sqrt{\left(\frac{km+n}{2k}\right)^2+\left(\frac{km+n}{2}\right)^2}$，$d_P \to OD=\frac{|mk-n|}{\sqrt{k^2+1}}$.

$\therefore t=\frac{|km-n|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4k^2}+\frac{1}{4}}\cdot|km+n| \Rightarrow \frac{|k^2m^2-n^2|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\sqrt{\frac{1+k^2}{4k^2}}$

$=\frac{|k^2m^2-n^2|}{|2k|}$. ∴故为2组双曲线.

$k^2m^2-n^2=\pm2kt$. $k^2x^2-y^2=\pm2kt$ 即 $\frac{x^2}{\frac{2t}{k}}-\frac{y^2}{2kt}=\pm1$ 关注到 $a^2\cdot b^2=4t^2$

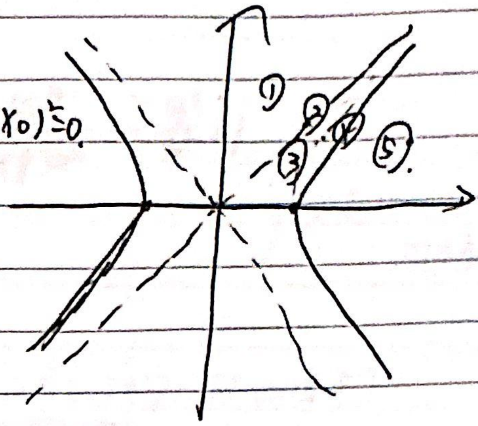
(共轭曲线)

$=4\cdot S_平^2$.

过定点的直线与双曲线的交点个数：用 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$ 划画区域.

代数阐释：设定点 (x_0,y_0)，由对称，考虑1st象限情形

若斜率存在



$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=k(x-x_0)+y_0\end{cases}\Rightarrow (b^2-a^2k^2)x^2-2ka^2(y_0-kx_0)-a^2b^2-a^2(y_0-kx_0)^2=0.$$

$\Delta=4a^2b^2[b^2-a^2k^2+(y_0-kx_0)^2]=0$ 反代回时：完全平方式

→ 1条曲线与双的关系，Δ出来=0

$b^2-a^2k^2\neq0$：二次项存在.

对于 $\Delta=0$，$\Rightarrow b^2-a^2k^2+y_0^2+k^2x_0^2-2x_0y_0k$

$=(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+b^2+y_0^2=0.$

存在 $k\Rightarrow\Delta\geq0.$

$\Delta_\Delta=4x_0^2y_0^2-4(b^2+y_0^2)(x_0^2-a^2)$

$=4x_0^2y_0^2-4(b^2x_0^2+x_0^2y_0^2-a^2b^2-a^2y_0^2)$

$=4a^2b^2-4b^2x_0^2+4a^2y_0^2$

$$\frac{\Delta_\Delta}{4a^2b^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1-\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right).$$

⑤：$\Delta_\Delta<0$，1条切线，

④ $\Delta_\Delta=0$：1条切线

①②③：$\Delta_\Delta>0$ ③：作同支的切线2条

③作一根 $(0,0)$：作不了切线

① 作2支的切线共2条

② $y_0=\frac{b}{a}x$：仅有一根代回去是 渐近线，一根是切线 这里同样划画出 $\Delta=0$.

若 $b^2-a^2k^2=0$，原方程只有一根 / 没根（过 $(0,0)$）

或法：一定要做切线直线，写切线方程，区分出2个交点

1个交点

0个交点

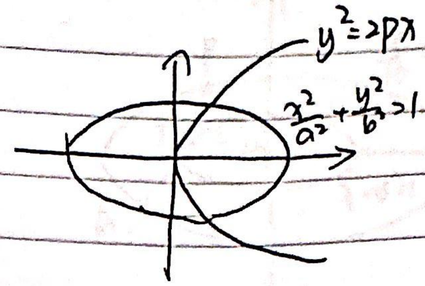
代几综合周推

①联立保号性 ✓

②韦达定理改系数

{周曲. 三次函.✓

1. 联立保号性



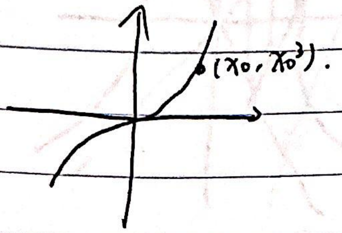
联立. way I: $x=\frac{y^2}{2p} \Rightarrow \frac{y^4}{4p^2a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. → 在 $(0,+\infty)$ 上有根.

way II: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{2px}{b^2}=1$.

[周曲与直线联立, 不破坏完全平方结构, 所以慎重]

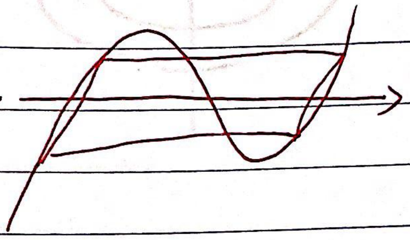
2. 韦达.

①. $y=x^3$ 作切线.



$y=3x_0^2(x-x_0)+x_0^3=3x_0^2x-2x_0^3$

⇒ 横坐标. $x=\frac{2x_0^3}{3x_0^2}=\frac{2}{3}x_0$. 损下来找三等分点即可.

③. 

三次函, 内接平四

是否中心与 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ 重合.

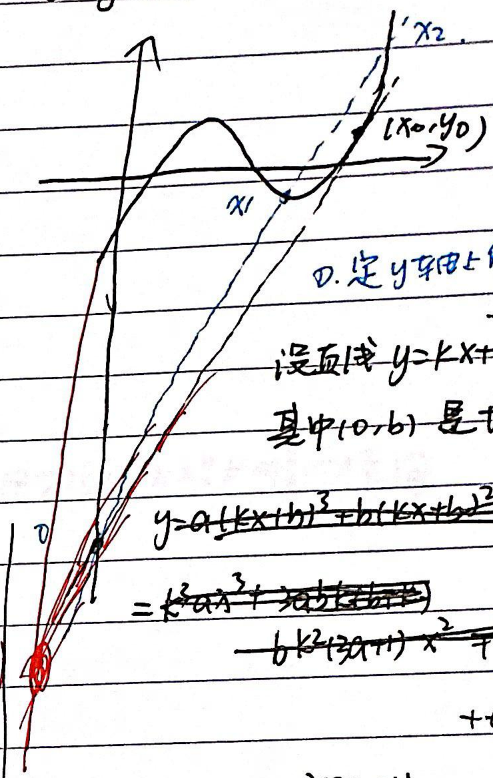
①对角线1: $y=k_1x+t_1$ 2: $y=k_2x+t_2$.

联立. 保2/3次系 ⇒ 中点同一个, 于三次函上.

且为 $-\frac{b}{3a}$. (同一点)

(②. 先平移三次函 $y=x^3+cx$, 设四个点, 证平行)

②. $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 作切线.



①. 定y轴上的点去逼.

设直线 $y=kx+b_0$.

其中 $(0,b)$ 是切线交点.

~~$y=a(kx+b)^3+b(kx+b)^2+c(kx+b)+d$.~~

~~$=k^3ax^3+3ab(kx+b)$~~

~~$-bk^2(3a+1)x^2+(3kab^2+2kb^2+ck)x$~~

~~$+ab^3+b^3+cb+d$.~~

~~$x_1+x_2+x_3=\frac{-bk^2(3a+1)}{k^3a}=\frac{-b(3a+1)}{ka}$.~~

$ax^3+bx^2+cx+d=kx+b_0$.

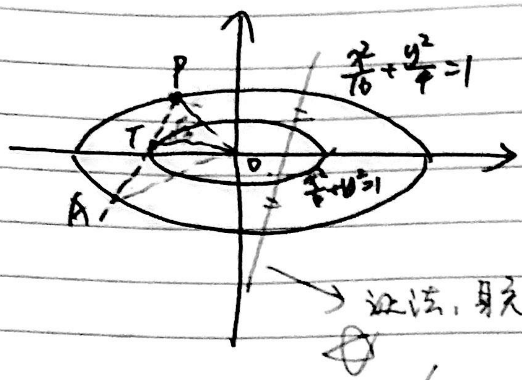
$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ 不变. (保系数

故予 该切线横 $(x_1=0, x_2=x_3=0)$

与y交点横.

* 不能基于与y轴交点, 而是基于算出来的第一个交点.

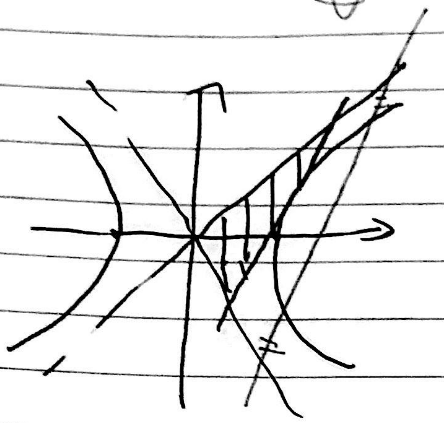
代几综合训练 2.



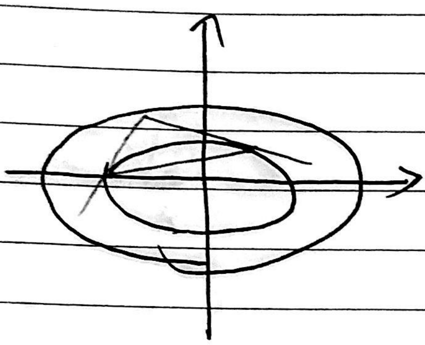
相似曲线. T切. $S_{\triangle PTO}$ 定值 $=\frac{1}{2}S_{\triangle PAO}$ (用T切之) 底×高.

PT=TA.(联系双曲线那个截距相等)

→ 设法, 联立2个, 写2组韦达 (由于曲线相似) → 中点问



S定

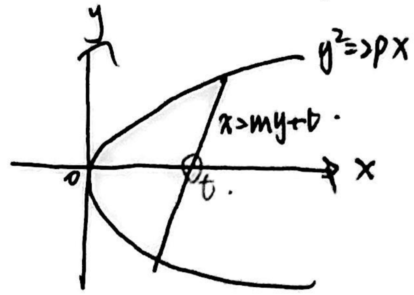


所有切点弦围成的面积 → 用切点弦方程反推内椭圆.

椭圆面子小好玩

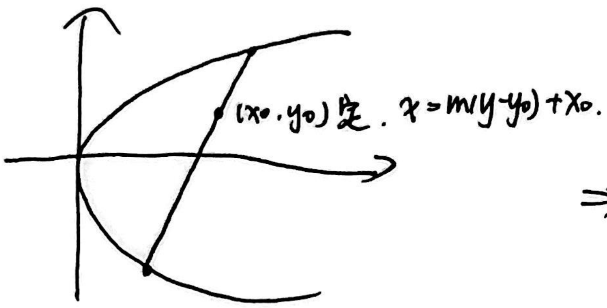
抛物线中纵坐标乘积定值的应用与证明.

(代几综合训练 3)



$y^2=2p(my+t) \Rightarrow y^2-2pmy-2pt=0$

$\begin{cases} y_1y_2=-2pt \\ y_1+y_2=2pm \end{cases}$ → p定, y_1y_2只依赖横坐标

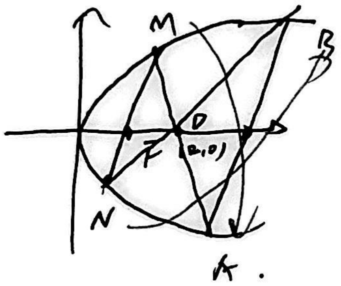


$y^2=2pm(y-y_0)+2px_0$.

$y^2=2pmy-2pmy_0+2px_0$

$\Rightarrow y^2-2pmy+2pmy_0-2px_0$. (以下方法论性状差一些)

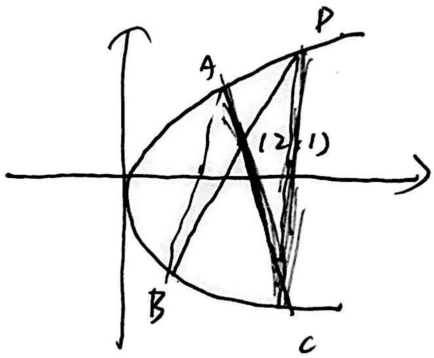
(2022 甲) $y^2=4x$. M F N 共线. D(2,0)



多以主推坐标

(2024 武汉九调). $y^2=4x$. 梯形ABCD在上, AB∥CD. AC∩BD=(2,1).

(i). 求 k_{AB}　　(ii) 证 AD与BC过定点. (找点找线)



解: (i) 记AB中点M　CD中点N. (梯形中点共线法).

可知由平行, $y_M=y_N$. 而 M, N, T 共线.

Link: 给你一个完的抛物线/椭圆. 怎么作各种线 (找点. 找线, 完全共线)

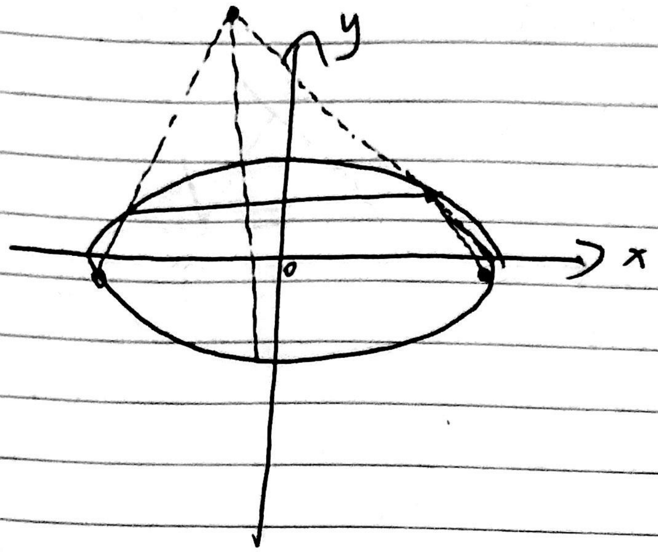
(结合点差法) $k_{CD}=\frac{2}{y_N}$.

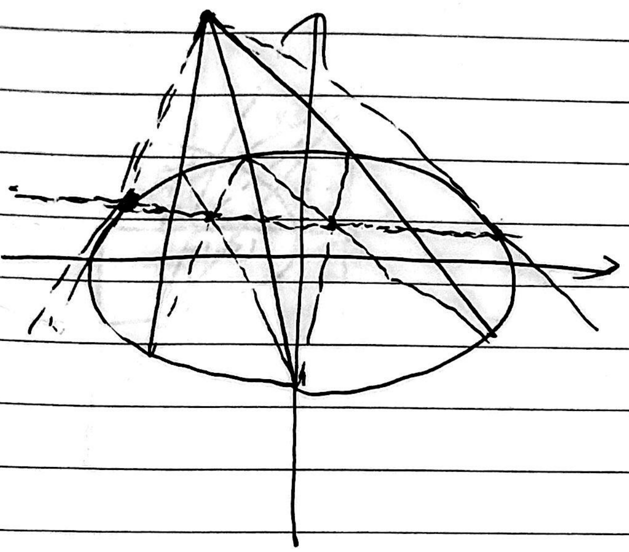
(ii) (由找线平移).

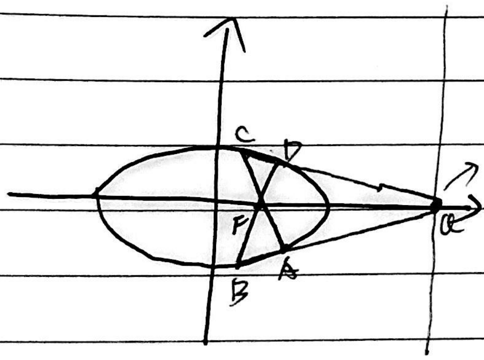
$k_{AC}=\frac{4}{y_A+y_C}$. $\Rightarrow y=\frac{4}{y_A+y_C}(x-x_A)+y_A$. 代入 $y^2=4x_A$ 与过(2,1) $\Rightarrow y_A+y_C=y_Ay_C+8$

同理. CD: $y_A+y_D=y_Ay_D+6$. $\Rightarrow$ AD过定点$(\frac{3}{2},1)$ 同理BC也. (体现运算顺序)

极点极线几何作图（用于参考）





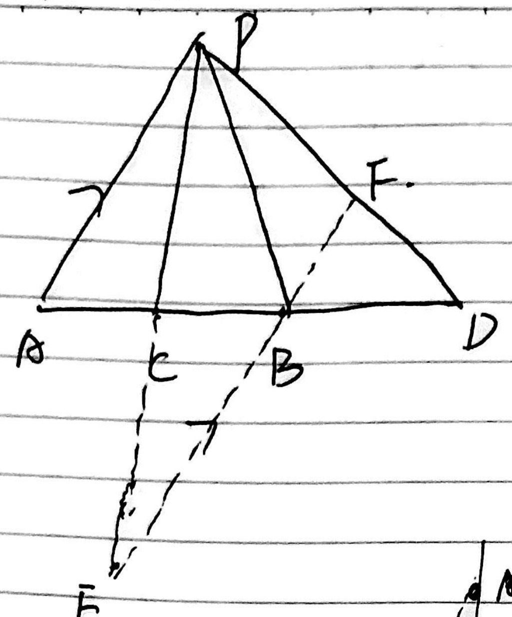


F极点．交解的点的轨为极线.

$AB \cap CD = Q$.

调和点列与极点极线(调和, 方程, 性质)

②



ABCD 按序(调和点列).

EF // PA. 问 $|BE| = |BF|$?

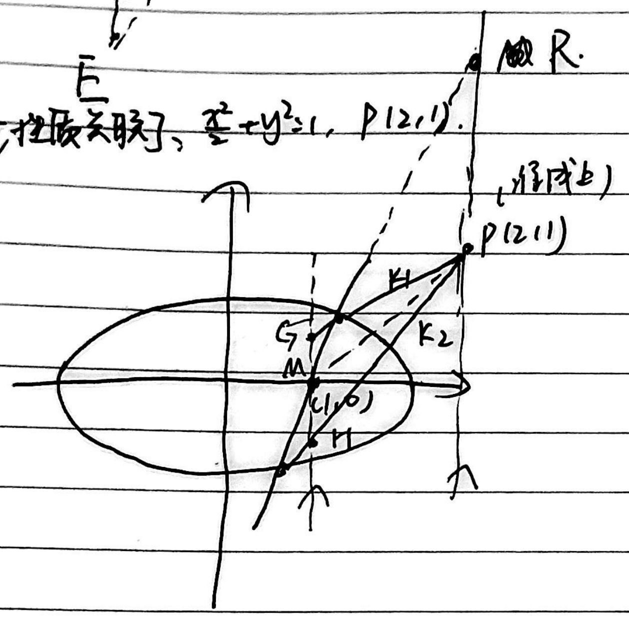
[作调和线平行线]

证: $\dfrac{|BF|}{|AP|} = \dfrac{|BD|}{|AD|}$,

$\qquad\qquad\qquad\ \ \|$

$\dfrac{|BE|}{|AP|} = \dfrac{|BC|}{|CA|}$

[性质关联], $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, $P(2,1)$.



~~过P极点 ⇒ 极线: $\frac{2x}{2}+y=1$ 即 $x+y=1$~~.

M为极点, (1,0) ⇒ 极线: $x=2$

⇒ $GM=MH$ (中点).

$P(2,1)$

$G(1,t)$ $\qquad k_1=\frac{1-t}{1}$

$M(1,0)$ $\qquad k=1$, $\qquad$ 易有 $k_1+k_2=2k$

$H(1,-t)$ $\qquad k_2=\frac{1+t}{1}$

椭圆面积推导

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，令 $x\geq0, y\geq0$ $y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$. $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

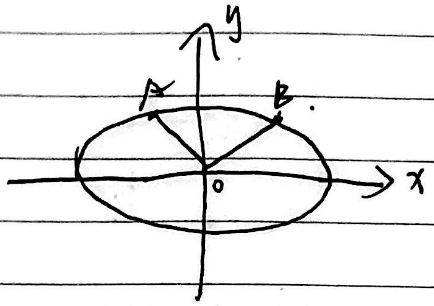
$f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $\frac{1}{4}S=\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$

令 $\frac{x}{a}=\cos\theta$. $\Rightarrow \frac{1}{4}S=\int_0^a b\sqrt{1-\cos^2\theta}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-ab)\sin^2\theta\,d\theta=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta$,

分开.

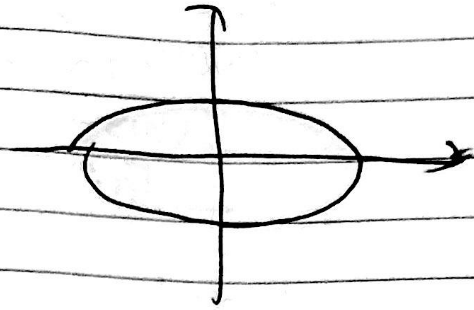
之 $\frac{ab}{4}$ $\Longrightarrow S=\pi ab$,

② 拓展,



~~FOAT~~ $|OA||OB|=ab$

$\Rightarrow k_{OA}$ 与 k_{OB} 乘积 $-\frac{b^2}{a^2}$.



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

对本part积分.

$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2.$

$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$ $\quad a\ t=\frac{\pi}{2}$

$\cancel{\cos 2\theta}=a$

$\frac{1+\cos 2\theta}{2}=2\cos^2\theta$

$b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx$

$=b\int_0^a \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx$ $\quad$ 设 $x=a\sin t.$

$\frac{1}{2}(\sin 2t)'=\cos 2t$

$\frac{1}{2}\sin 2a)$

$=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ dx$

$=ab\int_0^a \frac{1+\cos 2\theta}{2}\ dt.$

$=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ d(a\sin t)$

$=\frac{ab}{2}\left(\int_0^a (1+\cos 2t)\ dt.\right)$ $\quad \frac{1}{2}\sin\pi)$

$=\frac{b}{a}\int_0^a a\cos t\ d(a\sin t).$

$=\frac{ab}{2}\left(a\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\ dt\right)$

$=\frac{b}{a}\int_0^a a\cos t\cdot a\cos t\ dt.$

$=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$

$=\frac{b}{a}\int_0^a a^2\cos^2 t\ dt.$

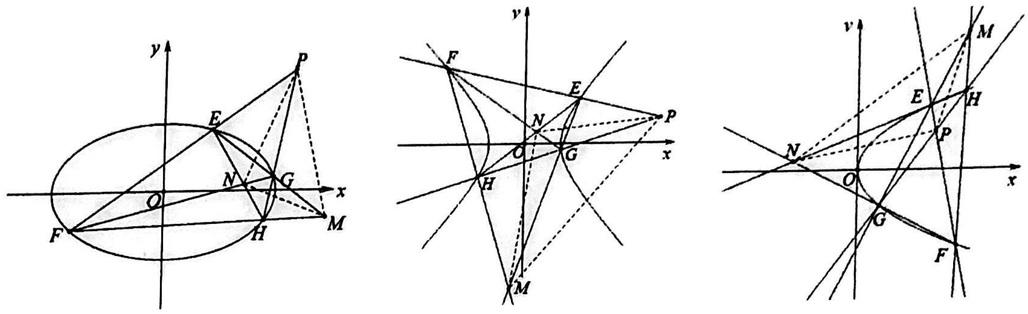
$=ab\int_0^a \cos^2 t\ dt$

$=\frac{\pi ab}{4}$

极点极线在圆锥曲线中的应用（一）

一、极点极线的几何定义

点 P 不是圆锥曲线上的点，过点 P 引两条割线依次交圆锥曲线于点 E,F,G,H，连接 EH,FG 交于点 N，连接 EG,FH 交于点 M，则直线 MN 为点 P 对应的极线，同理直线 MP 为点 N 对应的极线，直线 NP 为点 M 的极线．三角形 PMN 叫做自极三角形，如下图所示．



二、极点极线的代数定义

1. 预备知识

①在平面上，由二元二次方程 $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 所表示的曲线叫做二次曲线，对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$．

满足：$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{12}a_{23}+a_{13}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{23}a_{23}-a_{22}a_{13}a_{13}-a_{33}a_{12}a_{12}\neq 0$ 时，方程 $F(x,y)=0$ 所表示的曲线为非退化性二次曲线，即圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）．

②矩阵乘法运算法则：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，

则 $A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$．

③齐次坐标 笛卡儿坐标为 (x,y) 的点的二维齐次坐标 (x_1,x_2,x_3) 是指由任意满足 $\dfrac{x_1}{x_3}=x,\dfrac{x_2}{x_3}=y$，

三个数 x_1,x_2,x_3 组成的有序三数组 (x_1,x_2,x_3) 其中 $x_3 \neq 0$，一点的齐次坐标有无数组.

2. 代数定义：已知圆锥曲线：$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$，平面内任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$（齐次坐标），则 P 点对应极线 l 的方程为：

$(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，$P$ 点叫做极线 l 的极点，直线 l 叫做极点 P 的极线.

三、探究新知

已知平面内一点 $P(x_0,y_0)$，分别求出在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$、双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$、抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的背景下，点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程.（推广到焦点在 y 轴上的极线方程）.

探究：1. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 等价于 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$.

对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$，点 $P(x_0,y_0)$ 对应的齐次坐标为 $P'(x_0,y_0,1)$.

则 P 点对应极线 l 的方程为：$(x_0,y_0,1)\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，

即 $(b^2x_0,a^2y_0,-a^2b^2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，即 $b^2x_0x_1+a^2y_0x_2-a^2b^2x_3=0$，

方程两边同时除以 x_3 得 $b^2x_0\dfrac{x_1}{x_3}+a^2y_0\dfrac{x_2}{x_3}-a^2b^2=0$，即 $b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0$，

方程两边同时除以 a^2b^2 得 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$. 即平面内一点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 背景下对应的极线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，同时点 $P(x_0,y_0)$ 也是极线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 对应的极点.

同理可得点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 背景下对应的极线方程为 $\dfrac{y_0y}{a^2}+\dfrac{x_0x}{b^2}=1$，同时点 $P(x_0,y_0)$ 也是极线 $\dfrac{y_0y}{a^2}+\dfrac{x_0x}{b^2}=1$ 对应的极点.

探究：2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 等价于 $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$.

对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$，点 $P(x_0,y_0)$ 对应的齐次坐标为 $P'(x_0,y_0,1)$.

则 P 点对应极线 l 的方程为：$(x_0,y_0,1)\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，

即 $(b^2x_0,-a^2y_0,-a^2b^2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，即 $b^2x_0x_1-a^2y_0x_2-a^2b^2x_3=0$，

方程两边同时除以 x_3 得 $b^2x_0\frac{x_1}{x_3}-a^2y_0\frac{x_2}{x_3}-a^2b^2=0$，即 $b^2x_0x-a^2y_0y-a^2b^2=0$，

方程两边同时除以 a^2b^2 得 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. 即平面内一点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 背景下对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，同时点 $P(x_0,y_0)$ 也是极线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 对应的极点.

同理可得点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 背景下对应的极线方程为 $\frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$，同时点 $P(x_0,y_0)$ 也是极线 $\frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$ 对应的极点.

探究：3. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 等价于 $2px-y^2=0$.

对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & -1 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}$，点 $P(x_0,y_0)$ 对应的齐次坐标为 $P'(x_0,y_0,1)$.

则 P 点对应极线 l 的方程为：$(x_0,y_0,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & -1 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，

即 $(p,-y_0,px_0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，即 $px_1-y_0x_2+px_0x_3=0$，

方程两边同时除以 x_3 得 $p\frac{x_1}{x_3}-y_0\frac{x_2}{x_3}+px_0=0$，即 $px-y_0y+px_0=0$，化简得 $p(x+x_0)=y_0y$

即平面内一点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 背景下对应的极线方程为 $p(x+x_0)=y_0y$，

同时点$P(x_0,y_0)$也是极线$p(x+x_0)=y_0y$对应的极点.

同理可得:

①平面内一点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=-2px(p>0)$背景下对应的极线方程为$-p(x+x_0)=y_0y$,

同时点$P(x_0,y_0)$也是极线$-p(x+x_0)=y_0y$对应的极点.

②平面内一点$P(x_0,y_0)$在抛物线$x^2=2py(p>0)$背景下对应的极线方程为$p(y+y_0)=x_0x$,

同时点$P(x_0,y_0)$也是极线$p(y+y_0)=x_0x$对应的极点.

③平面内一点$P(x_0,y_0)$在抛物线$x^2=-2py(p>0)$背景下对应的极线方程为$-p(y+y_0)=x_0x$,

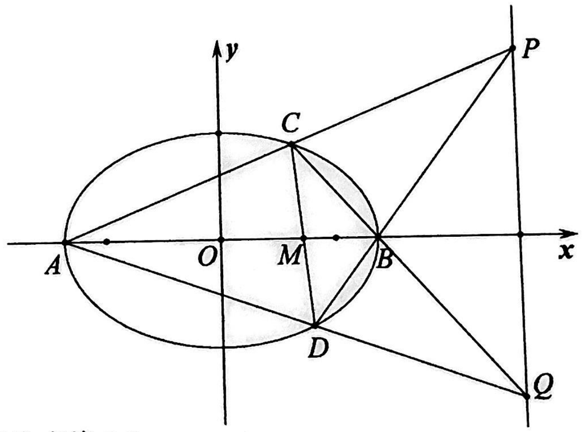
同时点$P(x_0,y_0)$也是极线$-p(y+y_0)=x_0x$对应的极点.

四、新知应用

例1(2020年全国1卷理科)已知A,B分别为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点,$G$为$E$的上顶点,其中$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$.$P$为直线$x=6$上的动点,$PA$与$E$上的另一个交点为$C$,$PB$与$E$的另一个交点为$D$.

(1)求E的方程;

(2)证明:直线CD过定点.



解析:(1)$\frac{x^2}{9}+y^2=1$;

(2)连接CB,AD并延长交于点Q,

CD与x轴交于点M,

由极点极线的几何定义知:点M对应极线为直线PQ.

因为平面内一点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$背景下对应的极线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$,

设$M(x_0,0)$,则点M对应的极线方程为:$\frac{x_0x}{9}=1$,即$x=\frac{9}{x_0}$,因为P为直线$x=6$上的动点,

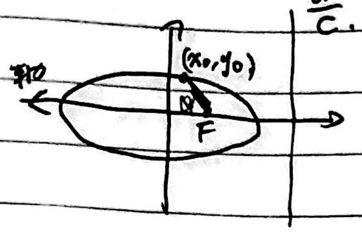
所以$x=\frac{9}{x_0}=6$,$x_0=\frac{3}{2}$,所以直线CD过定点$(\frac{3}{2},0)$.

焦半径的极坐标表示以及2401 22期末考(18)运算优化.

1.定义：以焦点为极点，极坐标下的圆曲，背离准线方向为极轴正方向

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$ $p \to$ 焦准距.

例：椭圆.



$$\frac{\rho}{\frac{a^2}{c}-x_0}=e \Rightarrow \rho=\frac{ea^2}{c}-ex_0$$

$$=\frac{c}{a}\times\frac{a^2}{c}-ex_0=a-ex_0.$$

$$\frac{ep}{1-e\cos\theta}=\frac{\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2}{c}}{1-\frac{c}{a}\cos\theta}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{a}\cos\theta}=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$$

而：$\cos\theta=\frac{c-x_0}{\rho}$.

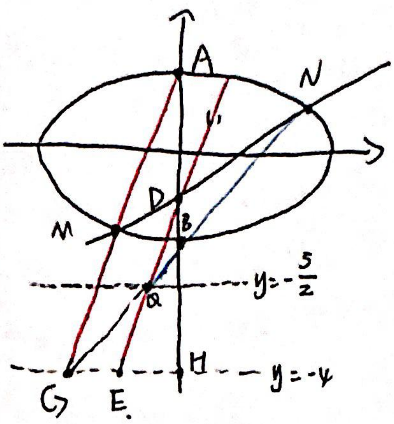
$$\rho=\frac{b^2}{a-c\frac{(c-x_0)}{\rho}} \Rightarrow \rho a-c(c-x_0)=b^2$$

$$\rho a+cx_0=a^2 \Rightarrow \rho=\frac{a^2-cx_0}{a}=a-ex_0$$

同.

2.例题.

$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$,



方法一：极点极线体系分析

$D(0,-1)$ $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ ⇒ D关于椭圆的极线为 $y=-4$.

于是引申出：D怎么作出这条极线的．

①. AM，BN相交肯定交于G，过过不过Q 我不清楚

所以暂且先不管Q．见图2，记交点为Q'

只要我证出 Q=Q'，那么它坐标为B．

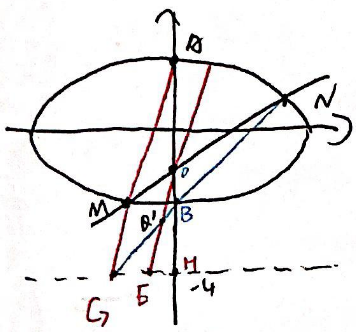
而 ED//AG，$\frac{DB}{BA}=\frac{1}{3}$

⇒Q'：

-2 → -2.5 ⇒ 求是的．

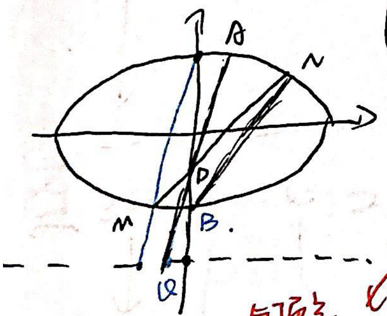
-4

于是 (0,-1)．



方法二：正经的对称手法，跟什么 $y=-4$ 没有半毛钱关系．(前提：猜到B是定点)

$\left(\begin{array}{l}\text{设 } BN: y=k_2x+m \\ l: y=k_1x-1\end{array}\right.$ $\Rightarrow \cancel{\frac{y+1}{y-m}=\frac{k_1}{k_2}}$ $\Big)$



$A(0,2)$

记 $MN: y=kx-1$，

$M:(x_M, y_M)$

$N:(x_N, y_N)$

$B(0,-2)$

与l交点，惯用手法 选这种结构的式．

$\boxed{\frac{k_{AM}}{k_{BN}}}=\frac{\frac{y_M-2}{x_M}}{\frac{y_N+2}{x_N}}=\frac{(y_M-2)x_N}{x_M(y_N+2)}=\frac{(kx_M-3)x_N}{(kx_N+1)x_M}=\frac{kx_Mx_N-3x_N}{kx_Mx_N+x_M}=\frac{3}{1}$

(余量/设计)

$\frac{y+1}{y-m}=3$. BN与l交点：$k_2x+m=k_1x-1$.

$k_1x+m=3k_2x-1$

$2k_2x=m+1$.

$x=\frac{m+1}{2k_2}$.

$m=-2$. $x=\frac{-1}{2k_2}$. k_2x-2. $-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$ (还是从头猜到尾)

极点 P(x_0, y_0) $\longrightarrow$ 极线

$x^2 \longrightarrow x_0x$

$y^2 \longrightarrow y_0y$

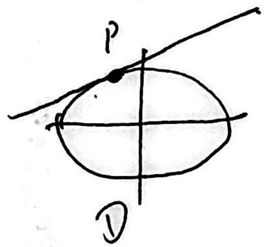
$x \longrightarrow \frac{x_0+x}{2}$

$y \longrightarrow \frac{y_0+y}{2}$

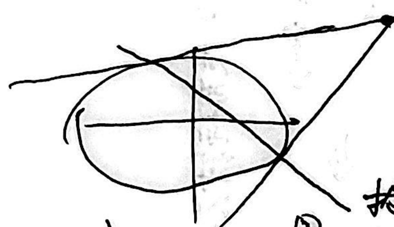
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$P(x_0, y_0)$.

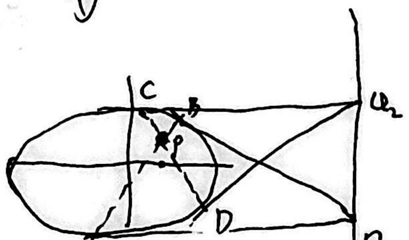
$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$



①



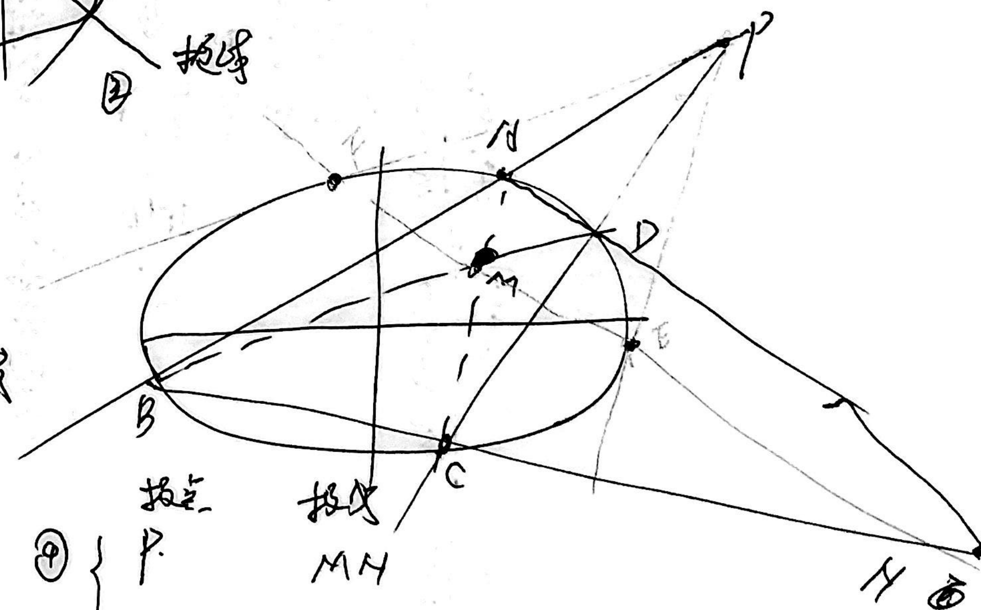
② 极线



③ 极线

过P作2割线

四点引切线



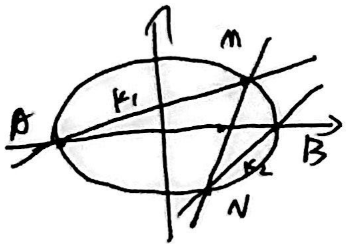
极点	极线
④ P.	MH
N.	PM.
⑤ ∴ M.	PH.

P. $(-c, 0)$.

$\downarrow$

$\frac{-cx}{a^2}+0=1$

$x=-\frac{a^2}{c}$



$\frac{k_1}{k_2}=\frac{CB}{AC}$ (不对称韦达)

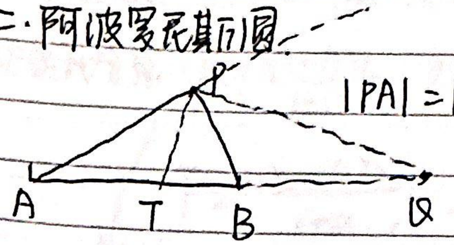
定比分点与定比点差法

一.定比分点.

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，O是平面内一点. $\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

↓ 注意点的顺序

二.阿波罗尼斯圆.



$|PA|=k|PB| \Rightarrow$ P轨圆.

几何证法：作∠APB的内外角平分线，由内外角平分线定理，$\dfrac{|AT|}{|TB|}=\dfrac{|AQ|}{|BQ|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}=k$

$\Rightarrow$ TQ定值，$PT\perp PQ$

$\Rightarrow$ 圆.

A,B,T,Q：调和点列，也作"T,Q调和分割A,B".

以下为例题

19. 交比是射影几何中最基本的不变量，在欧氏几何中亦有应用．设 A，B，C，D 是直线 l 上互异且非无穷远的四点，则称 $\dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{BD}{AD}$（分式中各项均为有向线段长度，例如 $AB=-BA$）为 A，B，C，D 四点的交比，记为 $(A,B;C,D)$．

↳可以写成向量

（1）证明：$1-(D,B;C,A)=\dfrac{1}{(B,A;C,D)}$；

（2）若 l_1，l_2，l_3，l_4 为平面上过定点 P 且互异的四条直线，L_1，L_2 为不过点 P 且互异的两条直线，L_1 与 l_1，l_2，l_3，l_4 的交点分别为 A_1，B_1，C_1，D_1，L_2 与 l_1，l_2，l_3，l_4 的交点分别为 A_2，B_2，C_2，D_2，证明：$(A_1,B_1;C_1,D_1)=(A_2,B_2;C_2,D_2)$；

↳"调和线束"

（3）已知第（2）问的逆命题成立，证明：若 $\triangle EFG$ 与 $\triangle E'F'G'$ 的对应边不平行，对应顶点的连线交于同一点，则 $\triangle EFG$ 与 $\triangle E'F'G'$ 对应边的交点在一条直线上（笛沙格定理）

解:(1).(依样画)

$(D,B;C,A)=\dfrac{DC}{BC}\cdot\dfrac{BA}{DA}$

$(B,A;C,D)=\dfrac{BC}{AC}\cdot\dfrac{AD}{BD}$

代入即可.

(2).$(A_1,B_1;C_1,D_1)$

$=\dfrac{A_1C_1}{B_1C_1}\cdot\dfrac{B_1D_1}{A_1D_1}$

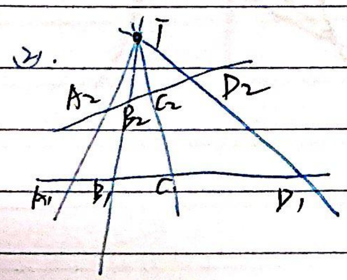
$=\dfrac{S_{\triangle TA_1C_1}}{S_{\triangle TB_1C_1}}\cdot\dfrac{S_{\triangle TB_1D_1}}{S_{\triangle TA_1D_1}}$

$(A_2,B_2;C_2,D_2)$

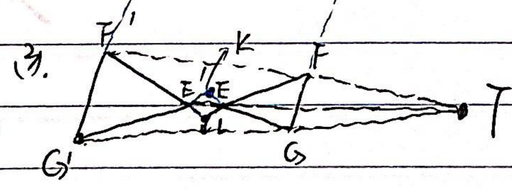
$=\dfrac{S_{\triangle TA_2C_2}}{S_{\triangle TB_2C_2}}\cdot\dfrac{S_{\triangle TB_2D_2}}{S_{\triangle TA_2D_2}}$

相除，全表$\frac{1}{2}ab\sin C$（夹角的分正弦）即可.

(2).



(3).



T 问三个交点为什么同一线

证法：$\triangle JG'G-F'FT$

$\triangle KG'G-E'ET$：列三次梅涅劳斯定理，反证即可

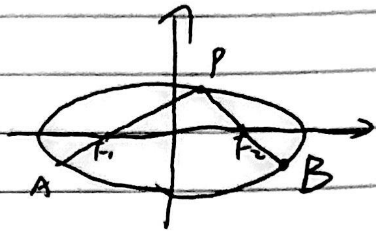
$\triangle LF'F-E'ET$

（此问可不看）

三、定比点差法

典例1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 左右焦点F_1, F_2. P在椭圆上.

$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1A}$, $\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2B}$. 问$\lambda+\mu$是否为定值



解. $P(x_0,y_0)$ $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

由定比分点, $F_1\left(\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}, \frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda}\right)=(-c,0)$

$F_2\left(\frac{x_0+\mu x_2}{1+\mu}, \frac{y_0+\mu y_2}{1+\mu}\right)=(c,0)$

这是一个标准的反向步骤:
平常:用已知表示未知
此处:用未知表示已知

$\Rightarrow \begin{cases} x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda) \\ y_0+\lambda y_1=0 \end{cases}$, 而 $\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \cdots ① \\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \cdots ② \end{cases}$ ①$-\lambda^2$②:构造平方差

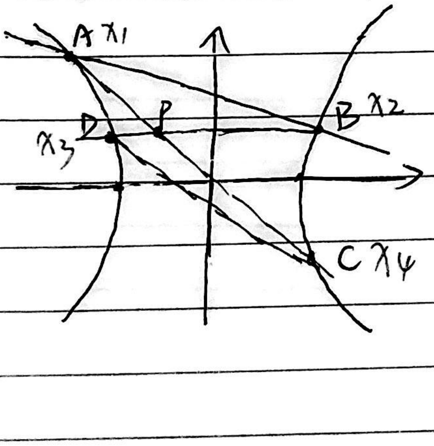
$\Rightarrow x_0-\lambda x_1=\frac{a^2(1-\lambda)}{-c} \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}\left(-c-\frac{a^2}{c}-c\lambda+\frac{a^2\lambda}{c}\right)$

同理: $x_0=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a^2}{c}+c\mu-\frac{a^2\mu}{c}\right)$ (③$-\mu^2$④)

$\Rightarrow \lambda+\mu=2\frac{1+e^2}{1-e^2}$

典例: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$, 直线$k=-\frac{1}{9}$, 与E左右两支交于A, B. $P(-1,1)$

AP与E交于另一点C. BP与E交于D. 若$k_{CD}=-\frac{1}{9}$. 问双曲线离心率______ ans. $\frac{\sqrt{10}}{3}$



设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{PD}$, 定比点差(用参数表示P)

λ

再放一道例题.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. F_1, F_2. $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. P动点, P第一象限. $S_{\triangle PF_1F_2}=S$, $PF_2\perp F_1F_2$时
左 右
$S=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(1). 标准方程.

(2). $PF_1\to M$, $PF_2\to N$. $S_1=S_{\triangle MF_1F_2}$, $S_2=S_{\triangle NF_1F_2}$.

证明: 存在常数λ使 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=\frac{\lambda}{S}$ (ans, $\lambda=10$)

(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

$M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$ $P(x_0,y_0)$

(2) 提示: 方法1. $S_1=-cy_1$, $S_2=-cy_2$ $\Rightarrow \lambda=-(\frac{y_0}{y_1}+\frac{y_0}{y_2})$

$=-(\frac{y_0^2}{y_0y_1}+\frac{y_0^2}{y_0y_2})$.

设 $MP: x=my-2$, $NP: x=ny+2$

$\Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{y_0}{x_0-2}$, $\frac{1}{n}=\frac{y_0}{x_0+2}$: 不对称表达

方法二: 设 $\overrightarrow{PF_1}=t\overrightarrow{F_1M}$: ~~不对称表达~~ (类似于前)

$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2M}$.

可得 $\lambda=t+\mu=10$

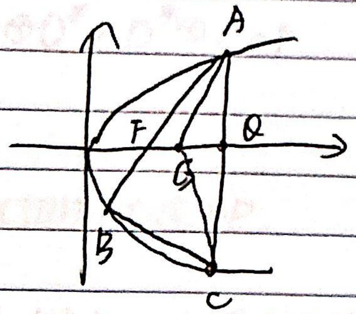
*向和分线剖画，两个单位向量求和。

(2018 浙江考题改)

$F(1,0)$，为抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点，过 F 的直线交抛物线 A，B 两点，点 C 在抛物线上，使 $\triangle ABC$ 重心 G 在 x 轴上，直线 C 交 x 轴于 Q，Q 在 F 右侧。

记 $\triangle AFG$，$\triangle CQG$ 面积为 S_1，S_2

2)，求 $\frac{S_1}{S_2}\min$，及 G 坐标



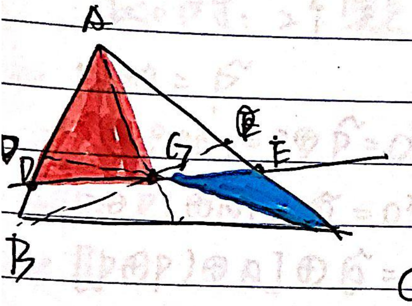
✱这题收录在 8007 中.

过程不赘述.

But，因为他在坐标系中，$\frac{S_1}{S_2}$ 多半用坐标法算.

请问可不可以脱离此题，直接算 $\frac{S_1}{S_2}$？

As：可以，可以完全不依赖坐标.



设 $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AD}}{\lambda}+\frac{\overrightarrow{AE}}{\mu}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AE}$.

由等和线：$\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$. ~ 联想：直线的截距式.

而 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{\triangle ABG}\cdot\lambda}{S_{\triangle ACG}\cdot(1-\mu)}=\frac{\lambda}{1-\mu}$

代入求得可得：$\frac{S_1}{S_2}\geq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

四省联考 T22.

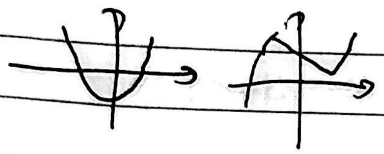
椭圆曲线 $C=\{(x,y)\mid y^2=x^3+ax+b,\ 4a^3+27b^2\neq 0\}$. $P\in C$ 关于x轴的对称点记为 $\tilde{P}$. C在点 $P(x,y)$ $(y\neq 0)$ 处的切线是指曲线 $y=\pm\sqrt{x^3+ax+b}$ 在P处的切线. 定义"⊕"运算: ①若 $P\in C, Q\in C$ 且直线PQ与C有第三个交点R, 则 $P\oplus Q=\tilde{R}$ ②若 $P\in C, Q\in C$ 且PQ为C的切线, 切点为P 则 $P\oplus Q=\tilde{P}$ ③若 $P\in C$, 规定 $P\oplus\tilde{P}=0^*$, 且 $P\oplus 0^*=0^*\oplus P=P$

(1). $4a^3+27b^2=0$ 时, 讨论 $h(x)=x^3+ax+b$ 的零点个数

(2). 已知"⊕"满足交换律, 结合律. 若 $P\in C, Q\in C$ 且PQ为C切线, 切点为P
求证 $P\oplus P=\tilde{Q}$

(3). 已知 $P(x_1,y_1)\in C$, $Q(x_2,y_2)\in C$, 且直线PQ与C有第三个交点, 求 $P\oplus Q$ 的坐标.

解 (1) $h'(x)=3x^2+a$, 而 $a\leq 0$ $\Rightarrow$ $h'(x)=0$ 时: $x=\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$



而 $4a^3+27b^2=0$

$\Rightarrow$ $b>0$ 时: $h(\sqrt{-\frac{a}{3}})=0$

$b<0$ 时: $h(-\sqrt{-\frac{a}{3}})=0$

∴ $a=0, b=0$ 时: 1个零点

$b>0$ 时: 2个零点

$b<0$ 时: 2个零点

→游戏T(看背面)

(2) $P\oplus Q=\tilde{P}$

$\Rightarrow P\oplus(P\oplus Q)=P\oplus\tilde{P}=0^*$

$\Rightarrow [(P\oplus P)\oplus Q]\oplus\tilde{Q}=0^*\oplus\tilde{Q}=\tilde{Q}$

而 $[(P\oplus P)\oplus Q]\oplus\tilde{Q}=P\oplus[P\oplus(Q\oplus\tilde{Q})]=P\oplus(P\oplus 0^*)=P\oplus P$

$\Rightarrow P\oplus P=\tilde{Q}$

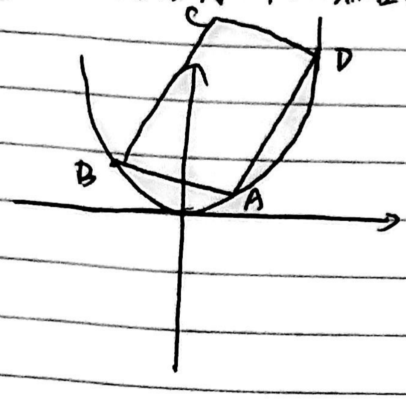
(3) 设第三个交点为 (x_3,y_3), $k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

(反正是硬解)

ans. $\left(\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2-x_1-x_2,\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\left[x_2+2x_1-\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2\right]-y_1\right)$

2023浙江一卷压轴题：绝对值放缩

$y=x^2$，矩形有三个顶点在抛物线上，证明其周长 $\geq 3\sqrt{3}$



*三角不等式

$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

"定点"

解 设 $A(x_0, y_0)$，$AD: y=k(x-x_0)+y_0$
$AB: y=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0$ → 考虑一句k的存在性，且不妨k正。

AD联立：$x^2-kx+kx_0-y_0=0 \Rightarrow \Delta x=\sqrt{k^2-4(kx_0-y_0)}=|k-2x_0|$

AB联立：$\Delta x = |-\frac{1}{k}-2x_0|$

$\therefore |AB|+|AD|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2x_0|+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|\frac{1}{k}+2x_0|$ 用对称性 $(k \sim \frac{1}{k})$

不妨 $k^2 \geq 1$：则 $|AB|+|AD| \geq \sqrt{1+k^2}\,|k-2x_0|+\sqrt{1+k^2}\,|\frac{1}{k}+2x_0|$

$\geq \sqrt{1+k^2}\,|k+\frac{1}{k}|$，求导即得.

【0】包络线（了解概念即可，不用会偏导）

包络线:就是跟一族曲线系中的每一条都相切的曲线。

设曲线系的方程为 $F(x,y,c)=0$

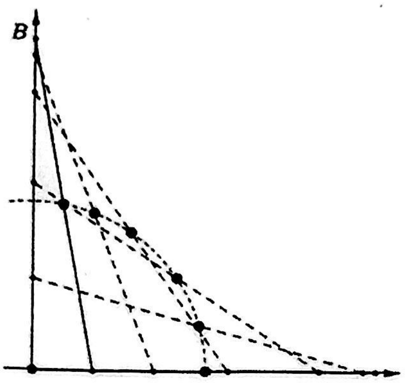
对c求偏导，得到 $\dfrac{\partial F}{\partial c}(x,y,c)=0$ → 对与自、因变量无关的参数求导.

【典例】一个梯子靠在墙上，由于梯子下沿比较光滑，致使梯子下滑直至滑倒在地，在这个过程中，求:

（1）梯子中点的轨迹;

（2）梯子靠近下沿的三等分点的轨迹;

（3）梯子的包络线



解析：为了方便，将梯子长度定单位1，模型抽象为如上图1的坐标系

（1）显然 AB 中点到原点的距离为 $\frac{1}{2}$，即中点轨迹是圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$

（2）由于 $|OA|^2+|OB|^2=1$，设 $A(\cos\theta,0)$，$B(0,\sin\theta)$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

则靠近下沿的三等分点坐标为 $\left(\frac{2}{3}\cos\theta,\frac{1}{3}\sin\theta\right)$，轨迹为椭圆 $\frac{9}{4}x^2+9y^2=1$

（3）设 $A(t,0)$，则 $B\left(0,\sqrt{1-t^2}\right)$，

线段 AB 方程为 $y+\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-t)=0$.

记 $f(x,y,t)=y+\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-t)$,

令 $\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t)=0$，即

$$-\frac{\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}+\sqrt{1-t^2}}{t^2}(x-t)-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}=0$$

解得 $t=x^{\frac{1}{3}}$

代入方程得到包络线为星形线:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

练习 1：24 届深圳中学二轮

19.（17 分）直线族是指具有某种共同性质的直线的全体．如：方程 $y=kx+1$ 中，当 k 取给定的实数时，表示一条直线；当 k 在实数范围内变化时，表示过 $(0,1)$ 的直线族（不含 y 轴）．

记直线族 $2(a-2)x+4y-4a+a^2=0$（其中 $a\in\mathbb{R}$）为 Ψ，直线族 $y=3t^2x-2t^3$（其中 $t>0$）为 Ω．

“含参直线”

(1)分别判断点 $A(0,1)$，$B(1,2)$ 是否在 Ψ 的某条直线上，并说明理由；

(2)对给定的正实数 x_0，点 $P(x_0,y_0)$ 不在 Ω 的任意一条直线上，求 y_0 的取值范围（用 x_0 表示）；

(3)定义直线族的包络为这样一条曲线：直线族中的每一条直线都是该曲线上某点处的切线，且该曲线上每一点处的切线都是该直线族中的某条直线．求 Ω 的包络和 Ψ 的包络．

解析：

（1）把点 $A(0,1)$ 代入直线族 Ψ 的方程 $2(a-2)x+4y-4a+a^2=0$ 得 $4-4a+a^2=0$

解得 $a=2$，所以点 $A(0,1)$ 在 Ψ 的某条直线上.

把点 $B(1,2)$ 代入直线族 Ψ 的方程 $2(a-2)x+4y-4a+a^2=0$ 得 $a^2-2a+4=0$

无解，所以点 $B(1,2)$ 不在 Ψ 的某条直线上

（2）因为点 $P(x_0,y_0)$ 不在 Ω 的任意一条直线上　翻译（考察的思想也没超纲）

所以方程 $y_0=3t^2x_0-2t^3$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上无实数解，即方程 $2t^3-3x_0t^2+y_0=0$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上无实数

令 $h(t)=2t^3-3x_0t^2+y_0$，$t\in(0,+\infty)$

则 $h'(t)=6t^2-6x_0t$

因为 x_0 为正实数，所以当 $h'(t)>0$ 时，解得 $t>x_0$；当 $h'(t)<0$ 时，解得 $t<x_0$

所以 $h(t)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x_0)=2{x_0}^3-3x_0\cdot{x_0}^2+y_0>0$

解得 $y_0>{x_0}^3$

(3)

①由（2）的结论猜测Ω的包络是曲线 $y=x^3(x>0)$ (先猜后证)

解方程 $3x^2=3t^2$，得 $x=t$.

轨迹要双向验证：(存在性与完备性)

轨迹上有这个点，
点在这个轨迹上

注意"取不到的点"

在曲线 $y=x^3(x>0)$上任取一点 (t,t^3)

则过该点的切线方程是 $y=3t^2x-2t^3$.

而 $\forall t>0$，$y=3t^2x-2t^3$的确为曲线 $y=x^3(x>0)$的切线.

故Ω的包络是曲线 $y=x^3(x>0)$

②将 $2(a-2)x+4y-4a+a^2=0$整理为关于 a的方程 $a^2+2(x-2)a+4(-x+y)=0$.

若该方程无解，则 $\Delta=4(x-2)^2-16(-x+y)<0$，整理得 $y>\frac{x^2}{4}+1$.

猜测 Ψ的包络是抛物线 $y=\frac{x^2}{4}+1$.

由方程 $\frac{x}{2}=-\frac{2(a-2)}{4}$，得 $x=2-a$.

在抛物线 $y=\frac{x^2}{4}+1$ 上任取一点 $\left(2-a,\frac{(2-a)^2}{4}+1\right)$

过该点的切线方程是 $2(a-2)x+4y-4a+a^2=0$

而 $\forall a\in\mathbf{R}$，$2(a-2)x+4y-4a+a^2=0$确为抛物线 $y=\frac{x^2}{4}+1$的切线.

故 Ψ的包络是抛物线 $y=\frac{x^2}{4}+1$

(跟前文的偏导没关系. 主要学一下这种双向验证，先猜后证的解题逻辑)

练习 2：

【湖南24届高三九校联盟二联T19】 直线族是指具有某种共同性质的直线的全体，例如 $x=ty+1$ 表示过点 $(1,0)$ 的直线，直线的包络曲线定义为：直线族中的每一条直线都是该曲线上某点处的切线，且该曲线上的每一点处的切线都是该直线族中的某条直线.

点距公式.

（1）若圆 $C_1: x^2+y^2=1$，是直线族 $mx+ny=1$（$m,n\in\mathbf{R}$）的包络曲线，求 m,n 满足的关系式；

（2）若点 $P(x_0,y_0)$ 不在直线族 $\Omega: (2a-4)x+4y+(a-2)^2=0$（$a\in\mathbf{R}$）的任意一条直线上，求 y_0 的取值范围和直线族 Ω 的包络曲线 E；

（3）在（2）的条件下，过曲线 E 上 A,B 两点作曲线 E 的切线 l_1,l_2 其交点为 P. 已知点 $C(0,1)$，若 A,B,C 三点不共线，探究 $\angle PCA=\angle PCB$ 是否成立？请说明理由.

解析：

（1）（摘自参考答案）由定义可知，$mx+ny=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 相切，

则圆 C_1 的圆心 $(0,0)$ 到直线 $mx+ny=1$ 距离等于1

则 $d=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=1$，即 $m^2+n^2=1$

（2）点 $P(x_0,y_0)$ 不在直线族 $\Omega: (2a-4)x+4y+(a-2)^2=0$（$a\in\mathbf{R}$）的任意一条直线上，

所以无论 a 取何值时，$(2a-4)x_0+4y_0+(a-2)^2=0$ 无解.

将 $(2a-4)x_0+4y_0+(a-2)^2=0$ 整理成关于 a 的一元二次方程：

$a^2+(2x_0-4)a+(4+4y_0-4x_0)=0.$

从无解猜包络方程，
再证明

若该方程无解，则 $\Delta=(2x_0-4)^2-4(4+4y_0-4x_0)<0$，即 $y_0>\dfrac{x_0^2}{4}$.

猜测直线族 Ω 的包络曲线 E 为 $y=\dfrac{x^2}{4}$.

下面证明:

在 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上任取一点 $Q(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$，$y=\dfrac{x^2}{4}$ 在该点处的切线斜率为 $k=\dfrac{x_1}{2}$，

于是可以得到 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 在 $Q(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$ 点处的切线方程为 $y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{4}$，即 $-2x_1x+4y+x_1^2=0$.

令直线族 $\Omega:(2a-4)x+4y+(a-2)^2=0$ 中 $2a-4=-2x_1$，则直线为: $-2x_1x+4y+x_1^2=0$.

所以该曲线上的每一点处的切线都是该直线族中的某条直线“把逻辑说满”.

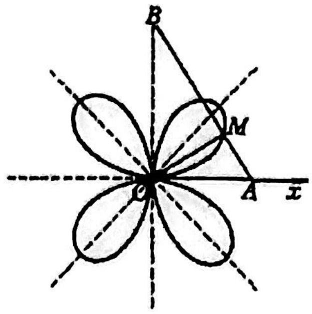
而对任意 $a\in\mathbf{R}$，$(2a-4)x+4y+(a-2)^2=0$ 都是抛物线在点 $\left(2-a,\dfrac{(2-a)^2}{4}\right)$ 处的切线.

所以直线族 Ω 的包络曲线 E 为 $y=\dfrac{x^2}{4}$.

（3）阿基米德三角形的一个结论

【2】四叶玫瑰线（不需要管它是什么形，问啥答啥，切忌被"题干背景"吓唬）

> 四叶玫瑰线(four − leaved)：
> 定长线段AB = 2a，它的两个端点在垂直两直线上滑动，从两直线的交点O向线段AB作垂线OM。
> 垂足M的轨迹称为四叶玫瑰线。
> ~~[illegible]~~



练习 1：

根据方程，变量范围，不等式放缩.

如图1，曲线 C：$(x^2+y^2)^3=16x^2y^2$ 为四叶玫瑰线，它是一个几何亏格为零的代数曲线，这种曲线在苜蓿叶型立交桥的布局中有非常广泛的应用。如图2，苜蓿叶型立交桥有两层，将所有原来需要穿越相交道路的转向都由环形匝道来实现，即让左转车辆驶入环道后再自右侧切向汇入主路，四条环形匝道就形成了苜蓿叶的形状。给出下列结论正确的是（ ）

A. 曲线 C 只有两个对称轴

B. 曲线 C 仅经过一个整点（即横、纵坐标均为整数的点）

C. 曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过 2

D. 过曲线 C 上的一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 2

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$

$\rho^6=16\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta$.

$\rho^2=16\cos^2\theta\sin^2\theta$

$\rho=4\cos\theta\sin\theta=2\sin2\theta$.

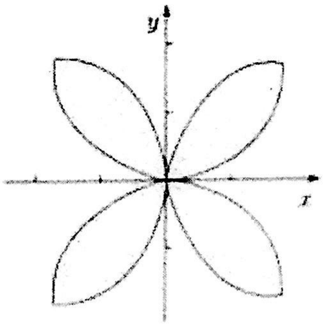


图 1

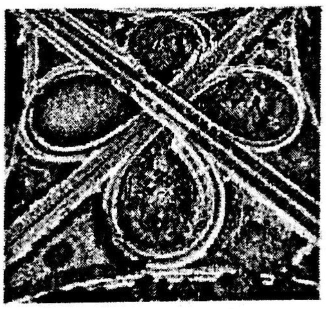


图 2

备注:苜蓿 [mù xu]

A：x,y轴，$x\to -x$ / $y\to -y$. 只要一样就对称
$y=x$, $y=-x$：$x\to y$ / $x\to -y$,

B：看图看一下(1,1) (2,2) 在哪里，挨个列举.

C，把右侧 x^2y^2 放缩成 x^2+y^2. $\left(x^2y^2\le\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right)$.

D. 把左侧 x^2+y^2 变 xy
$\geq S$.

练习 2：

数学中有许多寓意美好的曲线，曲线$C:(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$被称为"四叶玫瑰线"（如图所示）.给出下列三个结论：

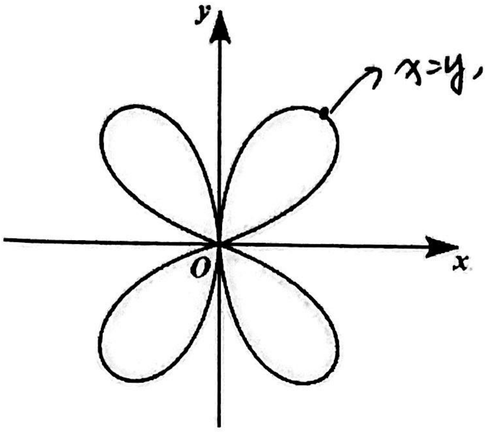
①曲线C关于直线$y=x$对称；

②曲线C上任意一点到原点的距离都不超过 1；

③存在一个以原点为中心、边长为$\sqrt{2}$的正方形，使曲线C在此正方形区域内（含边界）.

其中，正确结论的序号是（ ）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③



$x=y$，解坐标

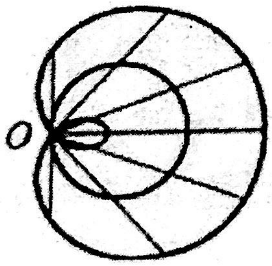
【3】蚶线

设C是一条已知曲线，O是一个定点，通过O作直线和曲线C相交于点P，在这直线上点P的两侧各取一点M，使|PM|总等于某个定长$a\ (a>0)$，那么，这种点M的轨迹叫作已知曲线C关于已知点O的**蚌线**(或螺形线)。曲线C叫作蚌线的基线，定点O叫作蚌线的极点，定长a叫作蚌线的间隔。

设C是平面上的一个定圆，O是位于定圆C上的一个定点，那么，圆C关于点O的蚌线叫作**帕斯卡蚶线**(或蜗线)，简称**蚶线** [1]

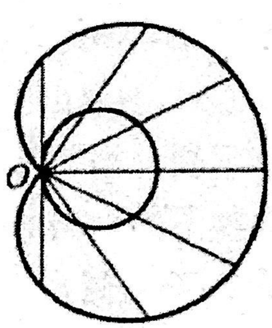
由蚶线的定义，不难描绘出蚶线，由于定圆C的直径h与间隔a的大小关系不同，蚶线呈现三种不同的形状，如表1。当$a=h$时，这种特殊的蚶线也叫作**心脏线** [1] 。

表1 蚶线



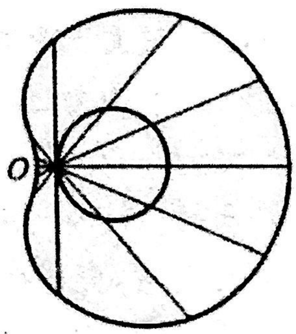
心脏线

$a<h$



心脏线

$a=h$



心脏线

$a>h$

蚶线: $r = a\cos\theta + b$(图 125). (此为极坐标表示, 不用管)

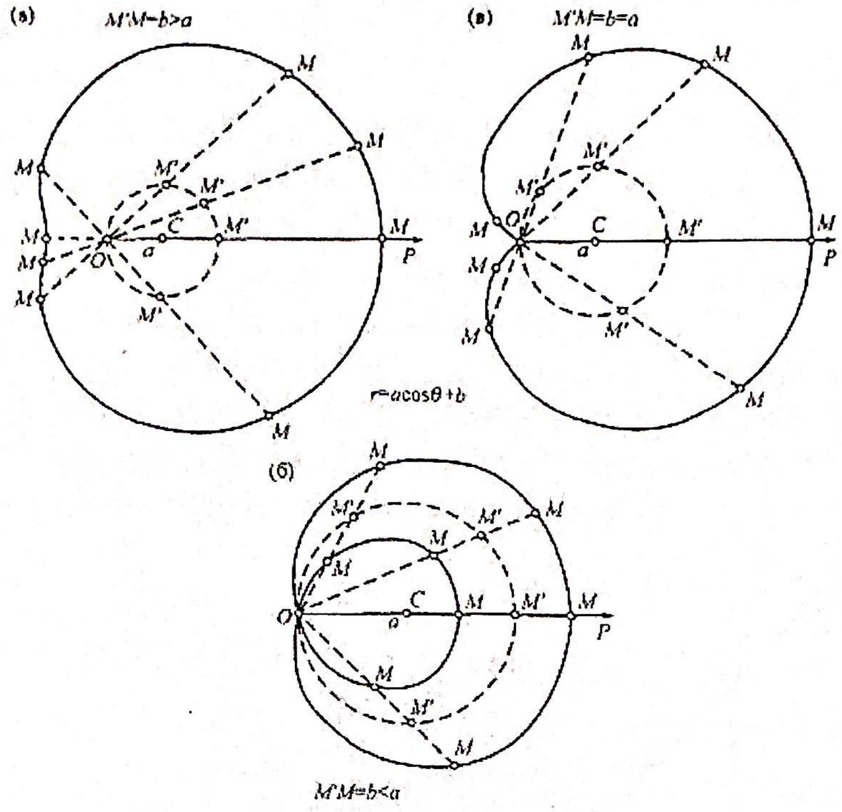


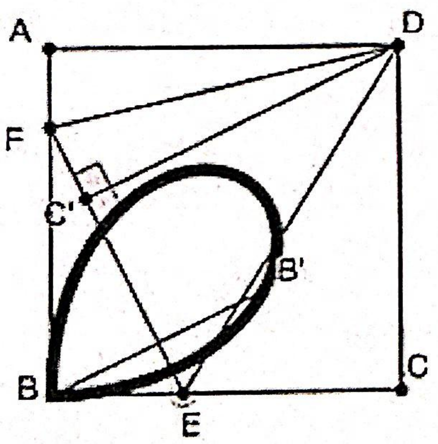
图 125

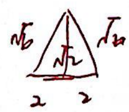
练习:

如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AD=1$, E 为 BC 边上的一动点, 将$\triangle DCE$沿直线 DE 翻折至$\triangle DC'E$, 取线段 AB 上一点 F, 又将$\triangle AFD$沿直线 DF 翻折至$\triangle A'FD$使得A'恰好与C'重合, 取点 B 关于直线 EF 的对称点 B', 则在点 E 运动过程中, BB'最大值为 ______________.

↓

对称, 定性.





*卡西尼卵线. $F_1(-2,0)$ $F_2(2,0)$. P满足 $|PF_1||PF_2|=6$. 问 $S_{\triangle PF_1F_2}max$: 3

⇔ $\frac{\pi}{2}$时取到

不是√6 取等 ($|PF_1|=|PF_2|$)

T8同: $\cos\angle F_1PF_2 = \dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} \geq \dfrac{2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} = -\frac{1}{3}$, $|PF_1|=|PF_2|$ 取等. $=\sqrt{6}$

$\therefore \sin\angle F_1PF_2 \in [0,1] \Rightarrow S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}\times 6\times \sin\angle F_1PF_2 \leq 3$

【4】悬链线

悬链线函数其实是双曲函数，双曲函数和三角函数一样也有六种：双曲正弦sinh，双曲余弦cosh，双曲正切tanh，双曲余切coth，双曲正割sech，双曲余割csch。双曲函数利用了三角函数的符号，这说明它与三角函数有很深的渊源。下面我们来看一看其定义。

我们知道，三角函数可在单位圆$x^2+y^2=1$内用三角函数线表示。对于一个确定的圆角θ，有与之对应的三角函数sinθ，cosθ，tanθ，cotθ，secθ，cscθ。类比三角函数与单位圆，双曲函数对应有"单位等轴双曲线"$x^2-y^2=1(x>0)$，也有被称为"双曲角"的概念。

在单位圆圆周上取一点，与圆心相连，所构造线段与x轴的夹角为θ；此点的坐标为(cosθ,sinθ)；线段、圆周与x轴围成的扇形面积为S，不难得出2S=θ。因此，不妨用扇形面积的二分之一来定义圆角θ。

同理，在单位等轴双曲线上取一点，与坐标原点相连构造线段；线段、双曲线与x轴围成的图形面积为S，依此定义双曲角t=2S。此点的坐标为(cosht,sinht)。