导数大题注意点

(2011 四川理 T22) $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$，$h(x)=\sqrt{x}$.

(Ⅱ). 解关于x的方程. $\log_4\left[\frac{3}{2}f(x-1)-\frac{3}{4}\right]=\log_2 h(a-x)-\log_2 h(4-x)$

(Ⅲ). $f(100)h(100)-\sum_{k=1}^{100}h(k)$ 与$\frac{1}{6}$的大小关系 → 关注初始值/特殊点.

当这些莫名其妙的数出现时.

(Ⅱ) 定义域优先

Correction plus!

No.

Date

对导函数的理解：全貌，不要只看边.

(2504 NB二模) T14.

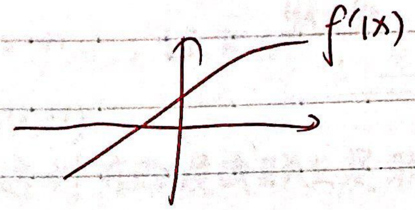
关于x的方程 $e^x+b^x=2$ ($b>0$ 且 $b\neq1$) 有唯一实根. b? → 是 $x=0$.

错解. 令 $f(x)=e^x+b^x$. $f'(x)=e^x+b^x\ln b$ $f''(x)=e^x+b^x\ln^2 b>0$.

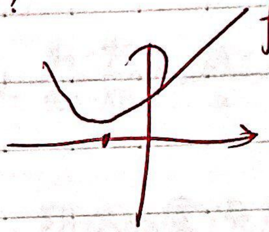
⇒ $f'(x)\uparrow$. $f'(0)=1+\ln b$., 只需 $1+\ln b>0$, 可保证 ↗ ⇒ $(\frac{1}{e},1)\cup(1,+\infty)$

否例.

△ 导函数无界单增表示原函数先减后增!



⇒

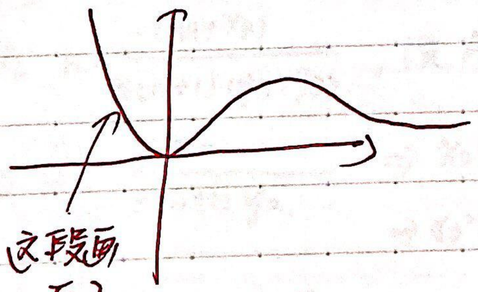


⇒ ans: $\{\frac{1}{e}\}\cup(1,+\infty)$

数形统一，考虑完整

3. (2505 22换模 T11)

x^2e^{-x}:



这段画反了

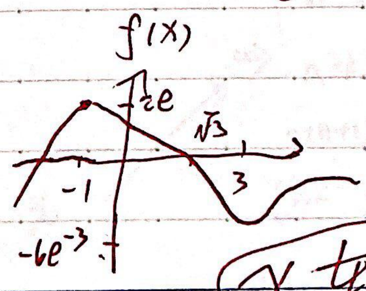
导函数为负表单减

(2025届高三上石家庄)

T14. $m=f(x)=\frac{3-x^2}{e^x}$. 3根.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot e^x-(3-x^2)e^x}{e^{2x}}$$

$$=\frac{(x^2-2x-3)}{e^x}=\frac{(x-3)(x+1)}{e^x}$$



x轴渐进

$(-6e^{-3},0)$ → no + $+\infty$

KOKUYO

No.

Date

对均与跨界命题

1.（四川）（预赛）

$f(x)=te^x$ $(t>0)$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 交于 A，B 的两个点．$P_0(0,f(0))$，P_0 处切线交 x 轴于 $Q_1(a_1,0)$，牛顿切线法 …… $Q_2(a_2,0)$ ……

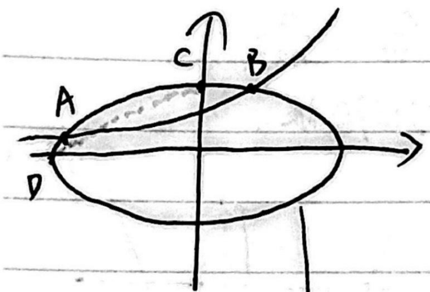
(1) 设 AB 直线为 k．(i)．证明：$k<S_{\triangle AQ_nQ_{n+1}}+S_{\triangle BQ_nQ_{n+1}}$

(ii)．若 $a^2=a_na_{n+1}$，求证：$k<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$．

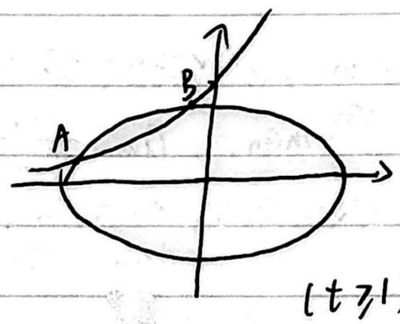
$\to$ (1). $a_n=-n$．，证 $k<\frac{y_A+y_B}{2}$　即：$2\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}<\frac{y_A+y_B}{2}$：对均．

(2). $a^2=n(n+1)$

分析：这种东西设线联立是联不动的．所以必需设点考虑点的三重属性．



$(t\in(0,1))$



$(t\geq1)$

$\to$ 此情型根据（2）行之义平移

$k_{CD}=\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$．

$k<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ （但不好写过程）

刻画①：

点差 $k=\frac{-(x_A+x_B)}{n(n+1)(y_A+y_B)}$，设 AB 中点 (x_0,y_0)

$\Rightarrow k=\frac{-x_0}{n(n+1)y_0}$　$\Rightarrow x_0=-a^2y_0k$．中点在曲线内：$\frac{x_0^2}{a^2}+y_0^2<1$

$\Rightarrow x_0^2=a^4y_0^2k^2 \longrightarrow a^2k^2y_0^2+y_0^2<1$

$\Rightarrow a^2k^4+k^2-1<0$．

$n(n+1)k^4+k^2-1<0$

$(nk^2+1)\left[(n+1)k^2-1\right]<0$ ✓

刻画②：对于 $y=te^x$：

$k=\frac{y_A-y_B}{\frac{\cancel{\ln y_1-\ln y_2}}{x_A-x_B}}=\frac{y_A-y_B}{\ln y_A-\ln y_B}<\frac{y_A+y_B}{2}=y_0$

（同分）

No.

Date

2.(awa 复杂的问题)

$a_n>0$，$b_n=n^2+n$，函数 $f_n(x)=e^x-x+\ln a_n-a_n$.

(1) 铺垫 若 $f_n(x)\geq 0$，求 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}$. → 太丑的东西是设计出的

(2). 设 $\frac{2b_n}{2b_n-1}<a_n<\frac{b_n+1}{b_n}$，记 M 为 $f_1(x)$，$f_2(x)$ … $f_n(x)$ 的所有零点组成的集合，X，Y 为 M 的子集，各 n 个元素. 且 $X\cap Y=\varnothing$，设 $x_i\in X$，$y_i\in Y$，$i=1,2,\dots n$. 且 $x_1<x_2<\dots<x_n$，$y_1>y_2>\dots>y_n$.

证 (i). $\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)(y_i+1)<n$　(ii) $\frac{n}{n+1}<\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|<\frac{2n}{n+1}$

[翻译题干，破解顺序]

(1). $e^x-x\geq e^{\ln a_n}-\ln a_n$，$e^x-x$ 在 0 处极小 $\Rightarrow a_n=1$. $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}=\frac{n}{n+1}$.

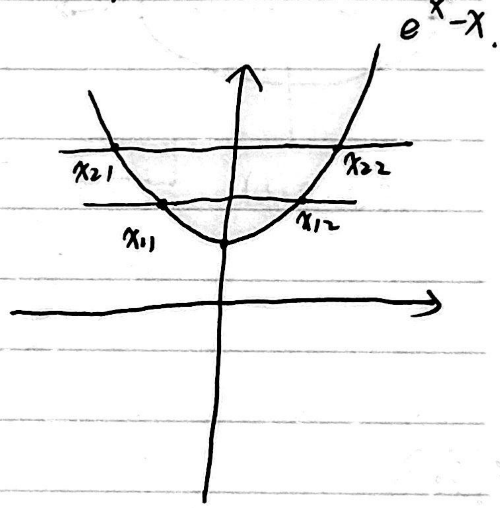
(2). $f_n(x)=e^x-x=e^{\ln a_n}-\ln a_n$.，$a_n>\frac{2b_n}{2b_n-1}>1\Rightarrow \ln a_n$ 为右侧正根.

分析，n 个正 n 个负. 假设 x_i 中：$x_1\sim x_k$ 为负

$x_{k+1}\sim x_n$ 为正

$\Rightarrow$　y_i 中 $y_1\sim y_{n-k}$ 正

$y_{n-k+1}\sim y_n$ 负



$\Rightarrow$ 据此排列 (manifest) $\Rightarrow x_i+y_i<0$.

(i) 即证 $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)<0$，只需证 $\sum(x_i+y_i)<0$

再重排，即证 $\sum x_i+\sum y_i<0$：极偏.

$e^x-x=b$
$e^y-y=b$ $\Rightarrow e^x-e^y=x-y\Rightarrow\sqrt{e^{x+y}}\leq\frac{e^x-e^y}{x-y}=1$　即证.

(ii) 左：$\frac{n}{n+1}=\sum\frac{1}{b_i}$　再重排　(极偏)

(依然是考虑整体). $\sum|x_i-y_i|=\sum|x_i|+\sum|y_i|=\sum|x_{i2}-x_{i1}|>\sum 2x_{i2}$

放缩：$x_{i2}=\ln a_i>\ln\frac{2b_n}{2b_n-1}>1-\frac{2b_n-1}{2b_n}=\frac{1}{2b_n}$　($\ln x>1-\frac{1}{x}$ 放缩)，故左证.

右. 即证 $\sum|x_{i2}-x_{i1}|=\sum|\ln a_i-x_{i1}|$ → $f(x)$ 中有这种结构)

$\ln a_i-x_{i1}=a_i-e^{x_{i1}}$ ($f(x)=0$)　上题中对称结构

$=a_i-(2-e^{x_{i2}})$

Campus　$\leq 2(a_i-1)$　$\Rightarrow\sum<2(a_1+a_2+\dots+a_n)-2n$，用 a_n 右侧放缩，也得.

No.

Date

比较隐晦的指对函小题.

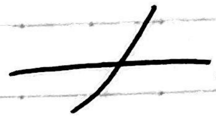
(2411 T8 T(4)) $f(x)=a^{x-1}-\log_a(x-1)$. ($a>0$且$a\neq1$). 为其定义域上的单调函,

问a.

$\left[a^{-\frac{1}{\ln a}}=a^{\frac{\ln\frac{1}{e}}{\ln a}}=a^{\log_a\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}\right]$

直接写. $x-1$ 和x 完全等价的

$g(x)=a^x-\log_a x$. $g'(x)=a^x\ln a-\frac{1}{x\ln a}=\frac{xa^x\ln^2 a-1}{x\ln a}$ $(x>0)$

分子: $xa^x\ln^2 a$: 若$a>1$, $\uparrow$, 0处为0 $\Rightarrow$ 与1大小关系  , X

(必须缩范围)

$\Rightarrow 0<a<1$ (xa^x 不知道. 有可能)

令 $h(x)=xa^x\ln^2 a$. $h'(x)=\ln^2 a(a^x+x\cdot a^x\ln a)$

$=a^x\ln^2 a(1+x\ln a)$

$\Rightarrow h(x)$在$(0,\frac{-1}{\ln a})\uparrow$, $(\frac{-1}{\ln a},+\infty)\downarrow$

$h(\frac{-1}{\ln a})=\frac{-1}{\ln a}\cdot\ln^2 a\cdot\frac{1}{e}=-\ln a\cdot\frac{1}{e}\leq1$

$\Rightarrow -\ln a\leq e$

$\ln a\geq -e \Rightarrow a\geq\frac{1}{e^e} \Rightarrow a\in[\frac{1}{e^e},1)$

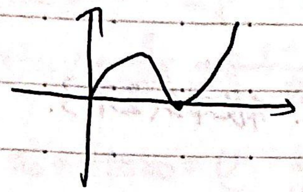
KOKUYO

谈一谈隐零点反代.(这里没有考表分离)

一.隐零点反代中的防守问题

(2020全国1理T21).

$x\geq 0$时. $f(x)=e^x+ax^2-x\geq \frac{1}{2}x^3+1$　　$\left(\frac{7-e^2}{4}\right)$.



①端点效应

②找防守 $\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f'(x_0)=0 \end{cases}$ 消超越项(e^{x_0}): $x_0=2$ (隐反)

(本质是猜根与消参)

(2025宁波十校T17).

(2)若 $\underbrace{xe^{x-1}-k(x-1)+e}_{f(x)}\geq 0$ 对于任意 $x\in[-2,+\infty)$ 恒成立. 问k.

$f'(x)=e^{x-1}(x+1)-k$, $f''(x)=e^{x-1}(x+2)\Rightarrow f'(x)\uparrow$. $f'(-2)=-e^{-3}-k$

若 $k<-e^{-3}$, 代-2即可. $-2e^{-3}+e+3k\geq 0$

若 $k>-e^{-3}$: $f(x)\downarrow\uparrow$. 隐零点. $k=e^{x_0-1}(x_0+1)$.

$\begin{cases} f(x_0)=0 & e^{x_0-1}(x_0+1)-k=0 \\ f'(x_0)=0. & x_0e^{x_0-1}=k(x_0-1)-e. \end{cases}$ $\Rightarrow$ 消k(隐反)

$\Rightarrow x_0e^{x_0-1}=e^{x_0-1}(x_0+1)(x_0-1)-e$ ∴ 可以因分

$e^{x_0-1}(x_0^2-x_0-1)-e$, 令$g(x)$., 看出3个2" (后略).

↳构造函数方程.

二:隐零点(端点效应)的不防守问题

(2306甲卷) $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. $ax-\frac{\sin x}{\cos^2x}+\sin x<0$. 问$a$范围.

令$g(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^2x}+\sin x$. $g(0)=0$., 单减?

$g'(x)=a+\cos x-\frac{1+\sin^2x}{\cos^3x}=\frac{\cos^4x-\sin^2x-1+a\cos^3x}{\cos^3x}$ ∴0处为a. $\Rightarrow a\leq 0$.

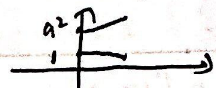
~~a>0反面.若a>0~~ ∴下证 $a<0$ 一定成立. 变主元. $\sin x-\frac{\sin x}{\cos^2x}+x\cdot a<\sin x-\frac{\sin x}{\cos^2x}<0$

$(\cos^2x<1)$

三. 隐零点反代中的代什么，怎么代，代多少问题 → 目标：无理 → 有理

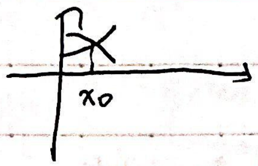
$\boxed{1}$ $a\in R$. 设 $f(x)=a\ln(x+a)+\ln x$. 若 $f(x)\le e^{a^2x}+\ln\frac{x}{a}-1$. $(x>0,a>0)$ (2104 NB=核)

解：设 $g(x)=a\ln(x+a)-e^{a^2x}+\ln a+1$.

$g'(x)=\frac{a}{x+a}-a^2e^{a^2x}$ (画图) 

①. $a>1$. $g'(x)$恒负 $\Rightarrow g(x)\downarrow$. 即证 $g(0)<0$: $a\ln a+\ln a<0$. 根本成立不了.

②. $a=1$. $\ln(x+1)-e^x+1\le 0$, $\ln(x+1)\le x\le e^x-1$ ✓

③ $0<a<1$  设隐零点 $\frac{a}{x_0+a}=a^2e^{a^2x_0}$ 即 $\frac{1}{a(x_0+a)}=e^{a^2x_0}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\ln\tfrac{1}{a}+\ln\tfrac{1}{x_0+a}=a^2x_0\\&-\ln a-\ln(x_0+a)=a^2x_0\end{aligned}}$$

即使 $g(x_0)\le 0$.

I $g(x_0)=a\ln(x_0+a)-e^{a^2x_0}+\ln a+1=a\ln(x_0+a)+\ln a+\underline{1-e^{a^2x_0}}$ (消ln；无理项)

$1-e^{a^2x_0}$很负，看你怎么组合才能逼出$g(x_0)<0$

$=a\cdot(-\ln a-a^2x_0)+\ln a+1-e^{a^2x_0}$

$=\underbrace{\ln a-a\ln a}_{负}-\underbrace{a^3x_0}_{负}+\underbrace{1-e^{a^2x_0}}_{负}<0$ ✓

II: $\cancel{g(x_0)=a\ln(x_0+a)-e^{a^2x_0}+\ln a+1}$

$\cancel{=a\ln(x_0+a)-\frac{1}{a(x_0+a)}+\ln a+1}$

放缩 e^{a^2x}

$g(x)\le a\ln(x+a)-a^2x+\ln a$，再放 $\ln(x+a)$，使得a^2x消元

$=a\ln(x+a)+a\ln a-a^2x+\ln a-a\ln a$

$=a\ln(ax+a^2)-a^2x+\ln a-a\ln a\le a(ax+a^2-1)-a^2x+\ln a-a\ln a$

$=a^3-a+\ln a-a\ln a=a(a^2-1)+(1-a)\ln a$

<0 ✓

III：(粗) $e^{a^2x_0}=\frac{1}{a(x_0+a)}\Rightarrow a^2x_0=-\ln a-\ln(x_0+a)$

$g(x_0)=a\ln(x_0+a)-e^{a^2x_0}+\ln a+1$ 代$\ln(x_0+a)$ 且代 $e^{a^2x_0}$

$=-a^3x_0-\frac{1}{a(x_0+a)}+\ln a-a\ln a+1$

$=\underline{-a^3(x_0+a)-\frac{1}{a(x_0+a)}}+\ln a-a\ln a+1+a^4$

$\le \underline{a^4+1}-\underline{a\ln a+\ln a}\underline{-2a}$ → 消元，配凑若本不了.

因分1.

优先放缩逼范围

(演院反三)

2 (2502高三名校协作体)

$f(x)=x^2+6x-8-8\ln x \geq ax$ 恒成 $(x>0)$, 问 a_{max} $(a\in\mathbb{Z})$ (隐急反+估值)

146, 178、可以放掉.

放缩.

$\ln x\leq x-1$

$-\ln x\geq 1-x$

$\Rightarrow f(x)\geq x^2+6x-8+8-8x$

$=x^2-2x\geq ax$

$\Rightarrow x-2\geq a.$

(大概就能逼范围)

解. 设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=x+6-\dfrac{8}{x}-\dfrac{8\ln x}{x}\geq a.$

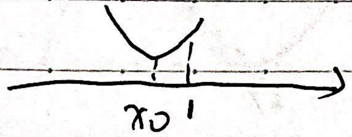
$g'(x)=1+\dfrac{8}{x^2}-8\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2+8-8+8\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2+8\ln x}{x^2}.$

令 $x_0^2+8\ln x_0=0$. $g(x_0)$ 为极小. $\rightarrow x_0<1$

$g(x_0)=\dfrac{x_0^2+6x_0-8-8\ln x_0}{x_0}$

$=\dfrac{2x_0^2+6x_0-8}{x_0}=\dfrac{2(x_0-1)(x_0+4)}{x_0}<0$ (隐零点代入, 得到 <0)

$g(x_0)=\dfrac{x_0^2+6x_0-8-8\ln x_0}{x_0}$. $g(1)=-1$ $\Rightarrow g(x_0)<-1$ (隐零点不代, 直接估值). 自由函数方程



3 (局部反代·广东阶段)

$h(x)=x\ln x-\ln x-x+e^x-e^{-x}$, $f(x)=x+\ln x$.

$f(r)=0$, $h(x)$ 最小值为 m, 问 m, r 关系

先猜后套 $r+\ln r=0.\Rightarrow \ln r=-r$, $r=e^{-r}$.

$h'(x)=\ln x-\frac{1}{x}+e^x+e^{-x}$, $\ln x_0-\frac{1}{x_0}+e^{x_0}+e^{-x_0}=0.$ $m=h(x_0)$

$\boxed{h'(r)=\ln r-\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+r=0}$ $\Rightarrow m=h(r)$

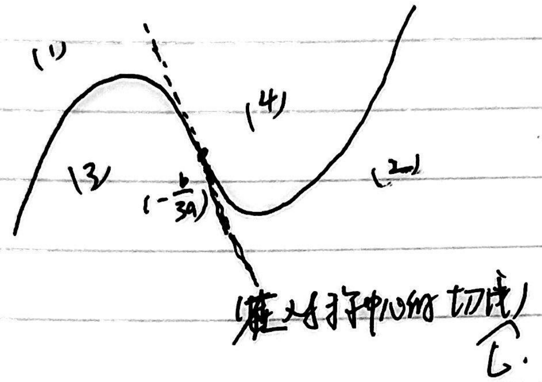
No.
Date

三次函数一些性质(摘抄版)

①联立保根号(代几综合阐释)

② 对称中心 $(-\frac{b}{3a},\ \sim)$

③ 可切性



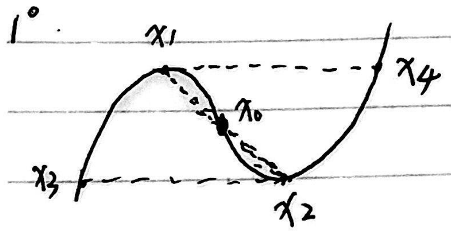
P在(3),(4),对称中心：1条切线.

P在L(除对称中心)上，/在曲线上，2条切线.

P在(1),(2)：3条切线.

④ 一些特殊线段比例 $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

1°.



四等分点：$2x_1+x_4=-\frac{b}{3a}=\frac{x_1+x_2}{2}$

$2x_2+x_3=-\frac{b}{3a}=\frac{x_3+x_4}{2}$

(特殊性)

对单调性与有界性的理解——以深二模为例

T18. $f(x)=x\ln x-1$. $f(x)$上一点$(x_0,f(x_0))$ $(x_0\ne e)$ 牛顿切线法. x_{n-1}处切线交x轴于x_n. (1) x_n与x_{n-1}递推 (2)设$f(x)$零点为r. $x_0>r$.

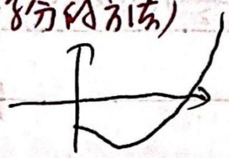
(i)证明: $x_{n-1}>r$时, $x_n>r$ → 怎么操作单调性与有界性? Lagrange?

(ii):证明: $\forall C\in[\frac{1}{2},1)$, $|x_n-r|<C^n|x_0-r|$ → 微分方程? 平移后切线$2x$ ↓ x^2拟合?

解(1). $x_n=\dfrac{x_{n-1}+1}{\ln x_{n-1}+1}$

(2)(i)(不详分的方法)

$r>e$



$f''(x)>0$. 由Lagrange中值定理 割线<切线.

(详分的方法)

①分析x_n与x_{n-1}单调性. 发现 $x_{n-1}<x_n$

⇒ 要用的是有界性 (本质, 牛顿切线法, 逼近零点)

设$g(x)=\dfrac{x+1}{\ln x+1}$. 则$g(x_{n-1})=x_n$

key: $g(r)=r$ 所以, $x_{n-1}>r \xrightarrow{单调性} g(x_{n-1})>r$ ⇔ $x_n>r$

→ 要用非零点处的点去做牛顿切线法 否则切来切去都一样的

3. (ii)(费法) 试证 $\dfrac{x_n-r}{x_{n-1}-r}<\dfrac{1}{2}$.

即证 $\dfrac{x_{n-1}+2-x_{n-1}\ln x_{n-1}}{\ln x_{n-1}+1}<r$. $\in(1,2)$

试证 LHS<1, ($x_{n-1}\ln x_{n-1}>1$ ($r\ln r$ 副, 单调)

即使 $x_{n-1}+1-x_{n-1}\ln x_{n-1}<\ln x_{n-1}$

$x_{n-1}>e$ ⇒ 分母正

(ii) 下证 $\dfrac{2(x_{k-1}+1)}{\ln x_{k-1}+1}-x_{k-1}<r$. 令$h(x)=\dfrac{2x+2}{\ln x+1}-x$

[先看特殊值. $h(r)=\dfrac{\cancel{2r}+2-r\ln r}{\ln r+1}$ $r\ln r=1$

$\Rightarrow h(r)=\dfrac{r+1}{\frac{1}{r}+1}=r$.

故证$h(x)$单调性: $x_{k-1}>r>e$, $h(x)$在…

quotes

(1):加减号别看错

(2):怎么用Lagrange?

① Rolle. ~换成引理

② $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 即可.

→ 王八. 发现这样放是放错的

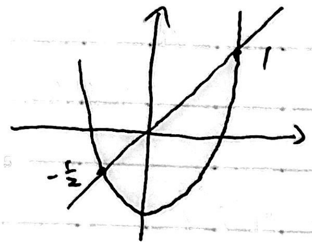
No. $2x^2-x-1=0$

$\begin{matrix} 2x & 1 \\ x & -1 \end{matrix}$

Date

补例：(微分方程与蛛网图) $\cos\alpha, \cos2\alpha, \cos4\alpha \cdots \cos2^n\alpha$ 每项均负，问α.

$f(x)=2x^2-1$. $f(x)=x$ $\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2}$.



过程：$\cos\alpha<0$.

key：先为有界论

由于 $\cos\alpha\in(-\frac{1}{4},0)$ 不对 $\Rightarrow \cos\alpha<-\frac{1}{4}$

$$|\cos2\alpha+\tfrac{1}{2}| = 2|\cos\alpha-\tfrac{1}{2}|\,|\cos\alpha+\tfrac{1}{2}| \geq 2\times\tfrac{3}{4}|\cos\alpha+\tfrac{1}{2}|$$
$$\geq \tfrac{3}{2}|\cos\alpha+\tfrac{1}{2}|$$

比1小即可

$$\Rightarrow |\cos\alpha+\tfrac{1}{2}| \leq \tfrac{2}{3}|\cos2\alpha+\tfrac{1}{2}|.$$

累乘. $(\frac{2}{3})^n$ ↓ 夹逼.

$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

能找到一个合适值即可，并非非要一步

No.

Date

△类函数同构可以长什么样（例举）

1、2503武汉八市模拟 T8.

$x=\ln e^{x}=e^{\ln x}$.

$x\pm\ln x$，$e^{x}\pm x$

$axe^{x}+\ln\frac{a}{x}\le x^{2}-x$.

优先　调整：配 $2\ln x^{2}$

$e^{x+\ln ax}+\ln\frac{a}{x}\le x^{2}-x$

$e^{x+\ln ax}+x+\ln ax\le x^{2}+\ln x^{2}$

2.（2503华师大附中）T8.

$\frac{e^{x-e}}{a}\ge e+\ln(ax)$　：处理 e^{e}.

$\frac{e^{x}}{ae^{e}}\ge\ln axe^{e}$.

$e^{x}\ge ae^{e}\ln axe^{e}$

$xe^{x}\ge axe^{e}\ln axe^{e}$. 有了

3.（2016 山东）T22.

$g(x)$：$ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\ge0$.　→可以先将复杂样式取对数

$\ln(ae^{x-1})=\ln a+x-1$

$ae^{x-1}+\ln(ae^{x-1})\ge\ln x+x$ ✓

4. 2025届巴蜀（2503）

$e^{x}+\frac{1}{e}\ge(a+\frac{1}{ex})(\ln a+\ln x)$ ↗齐，同乘 x.

↳ $xe^{x}+\frac{x}{e}\ge ax\ln ax+\frac{\ln ax}{e}$. ↘ 一法.（$x+1-1$）（$e^{x+1}+1$）$\ge$（$\ln aex-1$）（$aex+1$）

周法.

No.

Date

[illegible]

5. 证 $e^{2x}-a\ln x-2a-a\ln 2+a\ln a\geq 0$.

$\Rightarrow \frac{1}{a}e^{2x}-\ln x-2-\ln 2+\ln a\geq 0$.

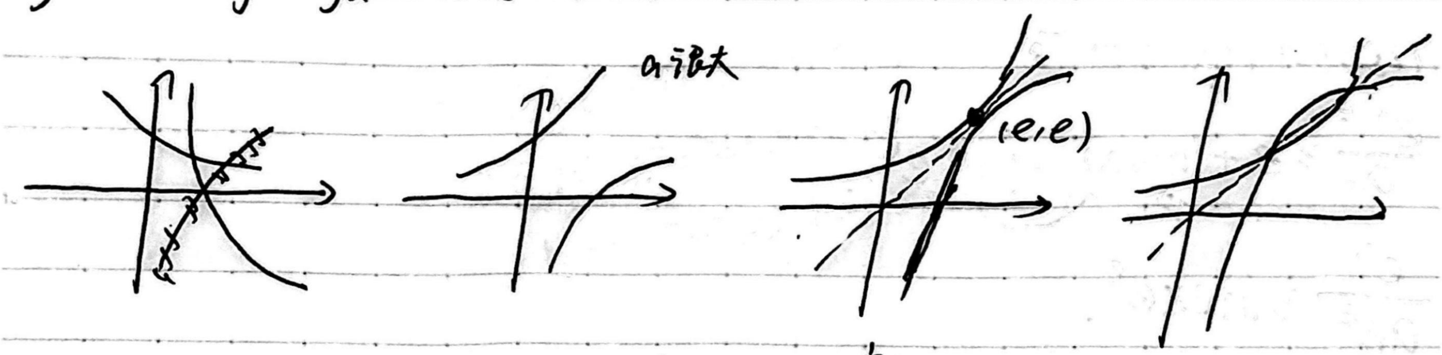
$e^{2x-\ln a}-(2x-\ln a)-2\geq \ln 2x-2x$ (配 $\underline{\underline{-2x}}$)

$\downarrow$

左1个右1个.

$e^{2x-\ln a}-(2x-\ln a)-1\geq \ln 2x-2x+1$ (即得)

6. $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的交点个数



$(e^{\frac{1}{e}})$

求解. $a^{x_0}=\log_a x_0=x_0$,

$a^{x_0}\ln a=\frac{1}{x_0\ln a}=1$.

$\Rightarrow a^{x_0}=x_0=\frac{1}{\ln a}$. $\Rightarrow a^{x_0}=a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{\log_a e}=e$. $\Rightarrow x_0=e$, $a^e=e$

$\Rightarrow a=e^{\frac{1}{e}}$

6. (2505 22接校). $n\in N^*$, $n\geq 3$. $\log_{n-1}x$ 与 $\log_n x+1$ 图象交点

$\rightarrow$ 作图感知 / 作差求导

同构: $x=n-1$ 时为交点.

对数单身狗操作机理.

$f(x)=(ax^2+x+2)\ln(x+1)-2x$, $x=0$ 极大, 问 a.

令 $g(x)=ax^2+x-2$, $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{ax^2+x-2}$.

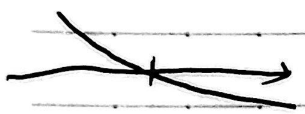
$\to f(x)=g(x)h(x)$, $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2ax^2-4}{(ax^2+x-2)^2}=\dfrac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(ax^2+x+2)^2}$

$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$

必要① $f'(0)=0$, 而 $h(0)=0$, $h'(0)=0 \Rightarrow f'(x)=0$ 恒成立.

② 极大值一致

$\to$: $f(x)$ 0处极大, $g(x)$在0附近为正 ($g(0)=2$), 除掉正数后 $h(0)$ 也是极大.



x^2不影响符号, 分母不影响符号

只关注 $a^2x^2+4ax+6a+1$: 0左正0右负

由 $h(x)$ 连续 $\Rightarrow$ 0处为0 $\to a=-\frac{1}{6}$

洛必达法则的反例

~~①不定式~~ $\lim\limits_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)}$

使用特性：① $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ($\frac{+\infty}{-\infty}$)

② $f(x), g(x)$ 在 x_0 去心邻域内可导且 $g'(x)\neq 0$ → 常函

别是什么分段函即可

③ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} \checkmark \\ \text{又是不定式，接着洛} \end{cases}$

例：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{1}$ X 不能用洛必达法则求极限

$\left(= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}\right.$，注意一点运算顺序)

例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{2} = 1$ X

你这一步没判定能否洛!!

端点效应来源：洛出答案：$m \leq \frac{f(x)}{g(x)}$ ($\geq$)，然后就是 $f(x)-mg(x)$，正负、单调、分析

对最值与极值的理解

$f(x)=ax^3-x^2+(2-a)x+2$. ∵ $f(1)=a-1+4-a=3$.

(1) 若$[0,2]$上最大值为3, a?

(2) 若$[-1,1]$上最大值为3, a?

{ 存在性问题
  恒成立问题

解、$f'(x)=3ax^2-2x+2-a$.

(1). 1处极大 $\Rightarrow f'(1)=0$, 求最值

(2) 1处不能极大(端值). 用最值.

$ax^3-x^2+(2-a)x+2\le 3$ 在$[-1,1]$上恒成立, ∴ 参变分离

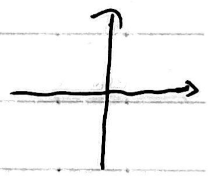
$ax^3-x^2+(2-a)x-1\le 0$. 因分

$(x-1)(ax^2+(a-1)x+1)\le 0$. ∴ 即使 $ax^2+(a-1)x+1>0$.(实根分布).

$a(x^2+x)>x-1$.(参变).

$$\left(\frac{x-1}{x(x+1)}\right)'=\frac{x^2+x-(x-1)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$$



没技巧就
No. 大胆求导，大胆
Date . 算爽元

不等式刷题基本功

1. 同构与拼和同构（可乘性造整体）

$a>0, b>0$，问 $\frac{6ab}{9b^2+a^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}$ max.

$\rightarrow \frac{2}{\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}}+\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \xrightarrow{\text{通分}} \frac{2\left(\frac{4b}{a}+\frac{4a}{3b}\right)}{\frac{a^2}{3b^2}+\frac{3b^2}{a^2}+\frac{10}{3}} = \frac{8\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{3b}\right)^{\triangleq t}}{\frac{a^2}{3b^2}+\frac{3b^2}{a^2}+\frac{10}{3}} \rightarrow$ 整体性.

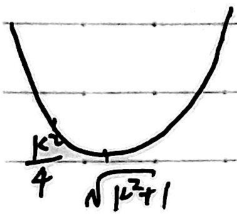
2. 构造取等条件

$x>0, y>0, x+y=k$. 则使 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^2$ 恒成立的 $k_{max}=$ ___?

$\rightarrow xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = xy+\frac{1}{xy}+\frac{(x+y)^2}{xy}-2 = xy+\frac{k^2+1}{xy}-2$.（通分胆子要大）

若均不取等：$xy=\sqrt{k^2+1} \longrightarrow$ 问：① $x+y=k$, $xy \leq \frac{k^2}{4}$，定义域内

② 右侧？



若 $xy=\frac{k^2}{4}$：代：$\frac{k^2}{4}+\frac{4k^2+4}{k^2}-2$：即为右侧.

$\longrightarrow$ 不在 $\sqrt{k^2+1}$ 取等.（若 $\frac{k^2}{4}>\sqrt{k^2+1}$，则矛盾，存在更小，不恒成立）

$\Rightarrow \frac{k^2}{4} \leq \sqrt{k^2+1}$. $\frac{k^4}{16} \leq k^2+1$. $k^4-16k^2-16 \leq 0$.

k^2: $\frac{16 \pm 8\sqrt{5}}{2}$

$= 8 \pm 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow k_{max}=\sqrt{8+4\sqrt{5}}$.

3. 初中自招惯用技俩：造Vieta

$\nearrow$ 实地是三次方程Vieta但不好操作

正数 a, b, c：$\begin{cases} a+b+c=12 \\ ab+bc+ca=45 \end{cases}$，问 a, b, c 中最大数的最小值.

（若问 a, b, c 中无限制 min，3元 12·3 法. 而截然）

$\rightarrow$ 设 $a \geq b$, $a \geq c$,

$b+c=12-a$

$bc=45-a(12-a)$

$\Rightarrow b, c$ 为关于 x 方程的 $x^2-(12-a)x+45+a^2-12a=0$ 的两根，在 $x \leq a$ 上有根（实根分布）

No.

Date

4. 配凑乘 (from XD)

$x,y\in R$ 且 $\neq 0$. $x^2+y^2=x^3y-xy^3$. 问 x^2+y^2 最小值.

$\downarrow$ → 因式分解 变均值.

$x^2+y^2=xy(x^2-y^2)=xy(x+y)(x-y)$

$=(y^2+xy)(x^2-xy)\leq\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2$.

$\downarrow$

or. 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$\Rightarrow x^2+y^2=r^2$,

而 $r^2=r^2\cos\theta\sin\theta\, r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=r^4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin2\theta\cdot\cos2\theta$.

$=\frac{r^4}{4}\sin4\theta$. 也有.

5. 累次极值

$x+y\leq1$, x,y 非负, 则 $4x^2+4y^2+(1-x-y)^2$ 取值范围. $[\frac{2}{3},4]$

→ os: 偏导? 直接配基不?

① 累次极值做主元.

$4x^2+4y^2+x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$.

$=5x^2+(2y-2)x+4y^2+(y-1)^2$. max: 端值

对称轴: $x=\frac{2y-2}{-10}=\frac{1-y}{5}$ ↑ → (相关变量有无关)

$\Rightarrow =\frac{24y^2-8y+4}{5}$, 再来一次.

② 令 $x+y=t$, 做法类似, 更清晰.

0.幂均：$a_i>0$，$n>m$，$n,m\in N^*$

则：$\left(\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\ge\left(\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_k^m}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$

k 取决于操作的个数.

（常见形式：$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$）

$\Leftarrow\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}{k}\ge\left(\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_k^m}{k}\right)^{\frac{n}{m}}$，令 $a_i^m=x_i$，$a_i^n=x_i^{\frac{n}{m}}$

$x^{\frac{n}{m}>1}$，此即为Jensen不等式.

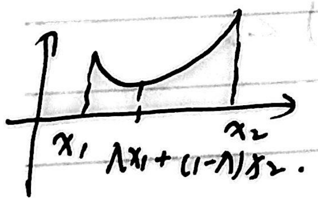
·信息熵：正数 $p_1,p_2\cdots p_{2^n}$，$\sum_{i=1}^{2^n}p_i=1$. 证 $\sum_{i=1}^{2^n}p_i\log_2 p_i\ge -n$.

（试Jense反向，调整负号）

即证 $p_1\log_2\frac{1}{p_1}+p_2\log_2\frac{1}{p_2}+\cdots+p_{2^n}\log_2\frac{1}{p_{2^n}}\le n$

即为加权Jensen.

·Jensen的Lagrange二元加权证法.



$p=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$.

(x_1,p) 上 Lagrange

(p,x_2) 上 Lagrange，加减代入消元即得.

（变成 $f'(\xi_1)$ 与 $f'(\xi_2)$ 的比较）

（数归推广）

·特殊含义

对于 $\sin x$（$x\in[0,\pi]$）使用Jensen不等式）

$\sin(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\lambda_nx_n)\ge\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sin x_i$ → 圆内接正n边形 S_{max}：正n边形

（ 权 λ_i 均相等）

$\frac{1}{2}\sin\theta$）

7.(毁天灭地的终极预测卷二).

C：证：$(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}\ge(|x|^q+|y|^q)^{\frac{1}{q}}$. $(0<p<q)$.

D：证：$2^{\frac{1}{q}}(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}\ge 2^{\frac{1}{p}}(|x|^q+|y|^q)^{\frac{1}{q}}$.(此即为幂均).

C、考虑 $(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$.

$f(x)=(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}$.(link x^x 求导.不要在这种形式里直接导)

$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(a^x+b^x)\triangleq g(x)$.(由于单调性一致，这样求导就行了)

$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(a^x+b^x)}$

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(a^x+b^x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$$

$$=\frac{-(a^x+b^x)\ln(a^x+b^x)+xa^x\ln a+xb^x\ln b}{x^2(a^x+b^x)}$$

$$=\frac{a^x\ln a^x+b^x\ln b^x-(a^x+b^x)\ln(a^x+b^x)}{x^2(a^x+b^x)}$$

令 $a^x=x'$，$b^x=y'$.

即：$g'(x)=$ $x'\ln x'+y'\ln y'-(x'+y')\ln(x'+y')$ 2向系

$=x'(\ln x'-\ln(x'+y'))+y'(\ln y'-\ln(x'+y'))<0$

$\Rightarrow g(x)\downarrow$.

Jensen与主元法

例，$\forall x_1, x_2 \in [0, \pi]$，$\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$ 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，

证：$\sin(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 \sin x_1 + \lambda_2 \sin x_2$.

例证、以λ为主元：设 $\lambda_1 = t$.

即证 $\sin(t x_1 + (1-t) x_2) \geqslant t \sin x_1 + (1-t) \sin x_2$.

设 $f(t) = \sin(t(x_1 - x_2) + x_2) - t(\sin x_1 - \sin x_2) - \sin x_2$，$f(0) = f(1) = 0$.

$f'(t) = (x_1 - x_2)\cos(t(x_1 - x_2) + x_2) - (\sin x_1 - \sin x_2)$，$f'(0) f'(1) < 0$

$f''(t) = -(x_1 - x_2)^2 \sin(t(x_1 - x_2) + x_2)$. $\Rightarrow f'(t)$ 单调；

(link 伯努利不等式，也可用主元法证，单变元)

→ (2004全国Ⅱ理科) T22. $g(x) = x\ln x$，$0 < a < b$，

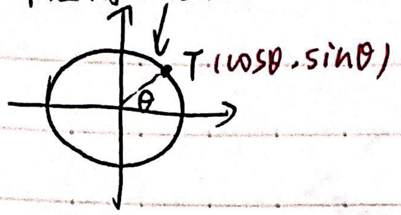
证 $0 < g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a)\ln 2$. (Jensen)

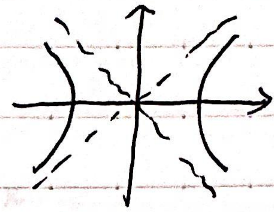
(主元法后更多)

双曲函数.（2501八省联考, 22出题方偏爱）

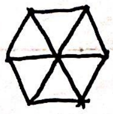
一.形式.

单位圆 $x^2+y^2=1$ 单位双曲线 $x^2-y^2=1$ （复平面中的圆）





↳△恒等式.



推导：$x^2+(-y)^2=1$

$\Rightarrow x^2+(iy)^2=1$

令 $x=\cos\theta$，$iy=\sin\theta \Rightarrow y=-i\sin\theta$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta) \\ x-y=\cos\theta+i\sin\theta. \end{cases}$$

由Euler: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$（用Taylor证明）

则 $x+y=e^{-i\theta}$，$x-y=e^{i\theta}$ $\Rightarrow x=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$y=\dfrac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2}$

（注意θ可能没有几何意义）

（三角函数的复变函数形式）

定义双曲函数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ [奇函数单增过(0,0)]

$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ [偶函数V型, 0处用基本不等式取等]

↳显然都没有周期性，且无上界.

二.性质迁移.

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \longrightarrow \sinh 2x=2\sinh x\cosh x$ （平方差）

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=2\cos^2\theta-1 \longrightarrow \cosh 2x=2\cosh^2 x-1$

$=1-2\sin^2\theta$

$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x+\cos^2 y-1 \longrightarrow \cosh(x+y)\cosh(x-y)=\cosh^2 x+\cosh^2 y-1.$

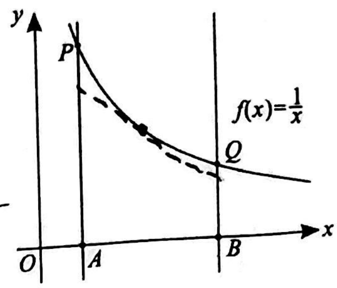
和差角？三倍角？万能？半角？…

积分相关

- 积分：反向求导：找原函数，含义是与坐标轴面积
（核心考察：对常见函数不等式的应用）

19.（本小题 17 分）　　　　　　　　　　　　题源：2024.3.
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　湖北七市州调研

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段．对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像连续不断，从几何上看，定积分 $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ 便是由直线 $x=a,x=b,y=0$ 和曲线 $y=\frac{1}{x}$ 所围成的区域（称为曲边梯形 $ABQP$）的面积，根据微积分基本定理可得 $\int_a^b \frac{1}{x}dx=\ln b-\ln a$，因为曲边梯形 $ABQP$ 的面积小于梯形 $ABQP$ 的面积，即 $S_{曲边梯形ABQP}<S_{梯形ABQP}$，代入数据，进一步可以推导出不等式：$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.



（1）请仿照这种根据面积关系证明不等式的方法，证明：$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$；过$(\frac{a+b}{2}, ---)$必写一条切线/割补

（2）已知函数 $f(x)=ax^2+bx+x\ln x$，其中 $a,b\in R$.

（i）证明：对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线均不重合；

（ii）当 $b=-1$ 时，若不等式 $f(x)\geqslant 2\sin(x-1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

(2) 证明，$f(x)=ax^2+bx+x\ln x$.　$f'(x)=2ax+b+1+\ln x$.

① $a\geq0$ 时：$\forall x_1\neq x_2$，$f'(x_1)\neq f'(x_2)$ ($f'(x)\uparrow$) $\Rightarrow$ 不重合.

② $a<0$：反证法：若存在相等，$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$
$y=f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)$ $\Rightarrow \frac{2}{x_1+x_2}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

但取不到等号，矛盾.

(ii) 必要性探路（很板的题）

$f(x)=ax^2-bx+x\ln x$.

$h(x)=ax^2-bx+x\ln x-2\sin(x-1)$.

$h(1)\geq0\Rightarrow a\geq1$

充分性：$h(x)\geq x^2-x+x\ln x-2\sin(x-1)\geq0$.

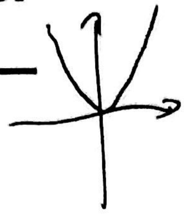
双曲函数可以用指数形式表示。对于双曲角t，有：

$$sinht=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

①奇偶性

②.单调性

$$cosht=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$



tanht，cotht，secht，cscht可以由sinht与cosht乘除组合而来，与对应的三角函数完全一致。

至此，不难得出双曲函数的一些性质。最重要的一条：$cosh^2t-sinh^2t=1$。其他性质类比三角函数得到，比如双曲函数的倍角公式、半角公式、和差化积与积化和差公式可由此推出，不再赘述。双曲正弦、双曲正切为奇函数，双曲余弦为偶函数，这也和对应的三角函数一致。

总之，双曲函数的性质与三角函数极为相似而又具有微小的差异。

练习 1：(2022衡中二模)

意大利画家列奥纳多·达·芬奇的画作《抱银鼠的女子》中，女士脖颈上黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽，达·芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的"悬链线问题"．后人给出了悬链线的函数解析式： $f(x)=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$**，其中** a **为曲线顶点到横坐标轴的距离，** $\cosh x$ **称为双曲余弦函数，其函数表达式为** $\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$**，相应地，双曲正弦函数的表达式为** $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$**．若直线** $x=m$ **与双曲余弦函数** C_1 **双曲正弦函数** C_2 **的图象分别相交于点** A**，** B**，曲线** C_1 **在点** A **处的切线** l_1 **与曲线** C_2 **在点** B **处的切线** l_2 **相交于点** P**，则下列结论正确的为**

A. $\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

B. $y=\sinh x\cosh x$ **是偶函数**

C. $(\cosh x)'=\sinh x$

D. 若 PAB **是以** A **为直角顶点的直角三角形，则实数** $m=0$

1 (2024.3. 重庆一中模拟八) T1P

帕德近似(Pade approximation)是有理函数逼近的一种方法. 已知函数 $h(x)=\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处的[1, 1]阶帕德近似定义为: $G(x)=\dfrac{c+bx}{1+mx}$, 且满足: $h(0)=G(0)$, $h'(0)=G'(0)$, $h''(0)=G''(0)$, …. 又函数 $f(x)=a\ln x-bex+2\ (a>0)$, 其中 $e=2.71828\cdots$.

$=1-$ 等差×等比 $=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

(1) 求实数 b, c, m 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交于 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ 两点, $x_1<x_2$, 且 $ax_1<mx_1x_2+x_2^2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

分离并比代

(1). $b=1$ $c=0$ $m=\frac{1}{2}$

(2). $m>e-1$

ans: $a\ln x_1=ex_1-2$

$a\ln x_2=ex_2-2$ $\Rightarrow a\ln\frac{x_2}{x_1}=e(x_2-x_1)$; 设 $\frac{x_2}{x_1}=t$ (比值代换),

结合洛必达法则.

19. 如果函数 $F(x)$ 的导数 $F'(x)=f(x)$，可记为 $F(x)=\int f(x)dx$．若 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ 表示曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴围成的“曲边梯形”的面积．

（1）若 $F(x)=\int \frac{1}{x}dx$，且 $F(1)=1$，求 $F(x)$；

（2）已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，证明：$\alpha\cos\alpha<\int_0^{\alpha}\cos x dx<\alpha$，并解释其几何意义；

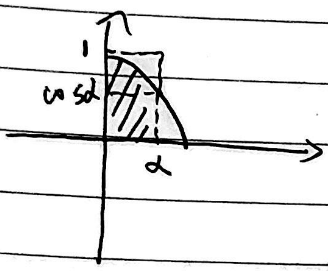
（3）证明：

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{3\pi}{n}}+\dots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)<\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

解. (1). ~~eg~~: $\ln|x|+1$.

(错解: $\ln x+1$)

(2).



右边: 面积

左边: 还是面积.

(3). way I: $\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{n}}=\sqrt{2\cos^2\frac{k\pi}{2n}}=\sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{2n}$, $k=1,2,\dots n$

$\Rightarrow$ 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\dots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)<\sqrt{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$. (利用 (2))

way II (简单变形)

$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\dots+\cos\frac{\pi}{2}\right]\right]<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1.$

布劳威尔不动点理论

一、应用.

$f(x)=x$ 的解. 不动点.

$f(f(x))=x$ 的解. 稳定点.

不动点与稳定点：① 个数同奇同偶

② 要么都有，要都没有

③ 不动点 $\subseteq$ 稳定点

eg. $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)=x \Rightarrow a(x_0-x_1)(x-x_2)=0$

$f(f(x))=x \Rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)(\text{再一个二次函数})=0$

多出来的东西.

例 17. 已知集合 $M=\{x|f(x)-x=0, x\in R\}$ 与集合 $P=\{x|f[f(x)]-x=0, x\in R\}$，其中 $f(x)$ 是一个二次项系数为1的二次函数. $M\subseteq P$

(1) 讨论 M 与 P 的关系；(2) 若 M 是单元素集，求证 $M=P$. 同奇偶.

导数相关·先猜后证思想

(南京盐城2024)

19 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax\sin x+\cos ax-1$，$0<x<\frac{\pi}{4}$.

~~米球度~~。

(1) 若 $a=2$，证明：$f(x)>0$；

(2) 若 $f(x)>0$，求 a 的取值范围；必搞

~~任务角度~~ = 1，b_n的

(3) 设集合 $P=\{a_n \mid a_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2k(k+1)}, n\in N^*\}$，对于正整数 m，集合 $Q_m=\{x \mid m<x<2m\}$，

记 $P\cap Q_m$ 中元素的个数为 b_m，求数列 $\{b_m\}$ 的通项公式.

可以尝试之后尝试论与高分

$b_m=m$.

这步方法就是先猜出的

(2) 解：$f(x)=ax\sin x+\cos ax-1$. $x\in(0,\frac{\pi}{4})$. $a>0$

$f'(x)=a(x\cos x+\sin x)-a\sin ax$

$f(0)=0$. 操作：$f'(0)=0$ $f''(0)$ $f''(x)\geq 0$. $a\leq 2$，然后再反杀.

(3) $a_n\leq n$. (三项有关找)

而 $ax\sin x+\cos ax-1>0$. 令 $a=2$，$\sin x$ 变 1

$\Rightarrow \cos 2x>1-2x$. $\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2k(k+1)}>1-\frac{\pi}{2k(k+1)}$

卡住 a_n 在 $n-1$，n 之间

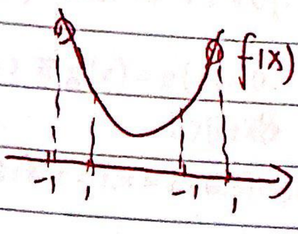
然后保留 $k=1$，$k=2$，从第三项开始放

(2024 T8联考)(我们讨论卷反杀)：切比雪夫与多点控制.

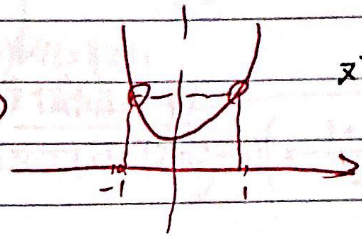
0：此类问题概述.

$f(x)=|x^2\pm ax\pm b|$, $x\in[-1,1]$, 问 $(f(x)_{max})_{min}$.

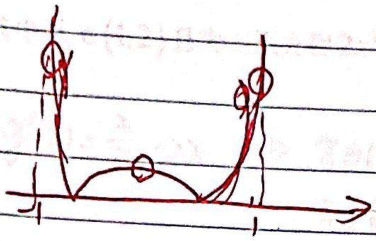
解答：



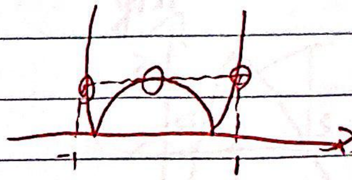
欲使$(max)_{min}$ $\Longrightarrow$



对称，但还不够小



欲使$(max)_{min}$ $\Longrightarrow$



通过调整图象来使max可以取到min.

通过三点控制 写成题能吃的样子

$$\begin{cases} f(1)\le M \\ f(0)\le M \\ f(-1)\le M \end{cases} \Longrightarrow M\ge \cdots$$

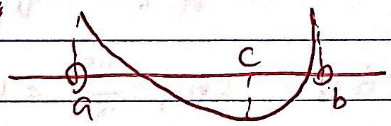
用图象求解.

假装来一下绝对值不等式.

(Cau：不要试图硬用绝对值不等式解决此类问题，因为取等条件是根据图象设计出来的)

乱用容易做错

* 若函数长这样



(含极值之偏)：$f(a)=f(b)=-f(c)$，取$(max)_{min}$

*：若形不平："斜"

例：$|\frac{1}{x}-ax-b|$, $x\in[1,2]$，求max的min

构造平口单峰：$|(\lambda x+\frac{1}{x})-[(a+\lambda)x+b]|$：$h(1)=h(2)\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$(待定系数) 即可.

平移要素

改形状，变平口

（原题呈现）

讲人话：有一条直线，[illegible]

记 $A=\{l(x)\mid l(x)=kx+m,k,m\in\mathrm{R}\}$，若 $l_0(x)\in A$，满足：对任意 $l(x)\in A$，均有 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-l(x)|\geq\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-l_0(x)|$，则称 $l_0(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上"最接近"直线．已知函数 $g(x)=2\ln x-x^2+3,x\in[r,s]$．

（类似平口单峰，切比雪夫不等式），斜口单峰

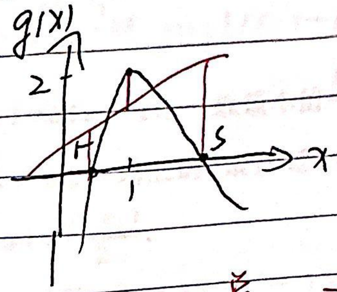
（1）若 $g(r)=g(s)=0$，证明：对任意 $l(x)\in A,\max|g(x)-l(x)|\geq1$；

值域长度的一半

→两根．

（2）若 $r=1,s=2$，证明：$g(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 上的"最接近"直线为：$l_0(x)=(2\ln2-3)\left(x-\frac{1+x_0}{2}\right)+\frac{2+g(x_0)}{2}$

其中 $x_0\in(1,2)$ 且为二次方程 $2x^2+(2\ln2-3)x-2=0$ 的根。



解(1) $g'(x)=\frac{2}{x}-2x \Rightarrow x\in(0,1)$：$g'(x)>0$，↑

$x\in(1,+\infty)$ $g'(x)<0$，↓．

而 $g(r)=g(s)=0 \Rightarrow 0<r<1<s$

$\Rightarrow g_{max}(x)=g(1)=2$．

$\max\limits_{x\in[r,s]}|g(x)-l(x)|\geq\max\limits_{x\in[r,s]}\{|g(r)-l(r)|,|g(s)-l(s)|,|g(1)-l(1)|\}$ —— 总归三种情况

$=\max\limits_{x\in[r,s]}\{|l(r)|,|l(s)|,|2-l(1)|\}$．

①．若 $|l(r)|,|l(s)|$ 至少有一个 ≥1，则 $\max\limits_{x\in[r,s]}|g(x)-l(x)|\geq1$．

②．若两者都 <1 $\Rightarrow \forall x\in[r,s]$，$l(x)<1$ ∴ $l(1)<1 \Rightarrow |2-l(1)|>1$

$\Rightarrow \max|g(x)-l(x)|>1$

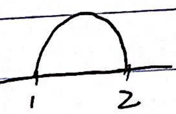
"漏洞不学术"

$\Rightarrow$ ~~$\max\limits_{x\in[r,s]}|g(x)-l(x)|\geq1$~~

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[r,s]}\{|g(r)-l(r)|,|g(s)-l(s)|,|g(1)-l(1)|\}\geq1$

当 $l(x)=\frac{g(1)}{2}=1$ 时 值为1．证毕

(2)．$g(1)=2$，$g(2)=2\ln2-1$ ∴斜口．



调整至平口，设 $f(x)=g(x)-h(x)$．

$f'(x)=\frac{2}{x}-2x-k=0$

此时 x_0，$k=2\ln2-3$，$f(1)=f(2)=0$．$f(1)=2-(2\ln2-3)-m=0 \Rightarrow m=5-2\ln2$

$\Rightarrow h(x)=(2\ln2-3)(x-1)+2$

结合平口单峰的思想即可．

$|2-l(1)|\}>1$.

由①②可知，$\max_{x\in[r,s]}\{|g(r)-l(r)|,|g(s)-l(s)|,|g(1)-l(1)|\}\geq 1$.

当 $l(x)=\frac{g(1)}{2}=1$ 时，

$\max_{x\in[r,s]}|g(x)-l(x)|=1$，$\max_{x\in[r,s]}\{|g(r)-1|,|g(s)-1|,|g(1)-1|\}=1$，此时等号成立.

结论证毕！ …………………………………… 7 分

(2)设 $h(x)=(2\ln 2-3)(x-1)+2$，再令 $f(x)=g(x)-h(x)$，

他在找话说

∴ $f'(x)=g'(x)-h'(x)=\frac{2}{x}-2x-(2\ln 2-3)$.

…………………………………… 9 分

令 $m(x)=\frac{2}{x}-2x-(2\ln 2-3)$，可得 $m'(x)=-\frac{2}{x^2}-2<0$.

∴ $f'(x)$在区间[1,2]上单调递减.

而 $f'(1)>0$，$f'(2)<0$，∴存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$. …………………………………… 11 分

即 $\frac{2}{x_0}-2x_0-(2\ln 2-3)=0\Rightarrow 2x_0^2+(2\ln 2-3)x_0-2=0$，

且 $x\in[1,x_0]$时 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；$x\in[x_0,2]$时 $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

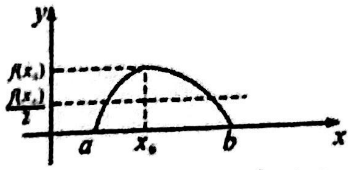
∴ $f(x)$在区间[1,2]上的最大值为 $f_{\max}(x)$ $f(x_0)$，

而 $f(1)=g(1)-h(1)=0$，$f(2)=g(2)-h(2)=0$. …………………………………… 13 分

则 $f(x)$在区间[1,2]上大于等于0.

由第(1)问分析知，对定义在$[a,b]$上的函数 $f(x)\geq 0$，若 $f(x)$满足 $f(a)=f(b)=0$，且 $x_0\in[a,b]$为 $f(x)$唯一的最大值点，则对任意的 $l(x)\in A$，$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-l(x)|\geq\frac{f(x_0)}{2}$，

$l(x)=\frac{f(x_0)}{2}$时取等号.



又 $\max_{x\in[1,2]}|f(x)-l(x)|=\max_{x\in[1,2]}|g(x)-h(x)-l(x)|$，

故当 $l(x)=\frac{f(x_0)}{2}$时，$\max_{x\in[1,2]}|f(x)-l(x)|=\max_{x\in[1,2]}|g(x)-h(x)-l(x)|$取最小值$\frac{f(x_0)}{2}$.

∴ $g(x)$在 $x\in[1,2]$上的"最接近"直线为：

$l_0(x)=h(x)+\frac{f(x_0)}{2}$，

即 $l_0(x)=(2\ln 2-3)(x-1)+2+\frac{g(x_0)-(2\ln 2-3)(x_0-1)-2}{2}$，

化简可得 $l_0(x)=(2\ln 2-3)\left(x-\frac{x_0+1}{2}\right)+\frac{2+g(x_0)}{2}$，其中 $x_0\in(1,2)$，且 x_0 是二次方程 $2x^2+(2\ln 2-3)x-2=0$ 的根. 证毕！ …………………………………… 17 分

看看标答怎样不说人话

*. $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$ $x\geq1$.

比值代换操作细节（怎么化齐次，引的分）

①. $\frac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$

② 例1：$\begin{cases}\ln x_1=2ax_1 & ①\\ \ln x_2=2ax_2 & ②\end{cases}$ 证 $\ln x_1+2\ln x_2>3$

想法：全化成t.

①. $\ln x_1+2\ln x_2=2ax_1+4ax_2=2atx_2+4ax_2$

② ①-②. $\ln t=2a(x_1-x_2)=2a(tx_2-x_2)=x_2\cdot2a(t-1)$

$\Rightarrow x_2=\frac{\ln t}{2a(t-1)}$

∴左 $=\frac{t\ln t}{t-1}+\frac{2\ln t}{t-1}$ 即可. （思想：利用 x_2 来表示t）.

是否换元

③ 例2：$\begin{cases}e^{x_1}=ax_1\\ e^{x_2}=ax_2\end{cases}$，试用t表示 $e^{x_1}+e^{x_2}$.

①. $e^{x_1}+e^{x_2}=ax_1+ax_2$

② 相除. $e^{x_1-x_2}=t$ ~~⟹ ln(at) x1−x2 = tx2 − x2 ⟹ 操作不了~~

$\Rightarrow x_1-x_2=\ln t\Rightarrow(t-1)x_2=\ln t$，$x_2=\frac{\ln t}{t-1}$.

则可代入！

*实际操作中，对两式直接取对：$x_1=\ln a+\ln x_1$，$x_2=\ln a+\ln x_2$，相减用对均

→多变引 a>e

③ 例3.（25届长郡天子）$\begin{cases}x_1e^{x_1}=ax_1+a\ln x_1\\ x_2e^{x_2}=ax_2+a\ln x_2\end{cases}$，$x_1<x_2$，问 $e^{x_1+x_2-1}>\frac{a}{x_1x_2}$？

解. ①.识别所求式，上下相乘. $x_1x_2e^{x_1+x_2}=\boxed{(ax_1+a\ln x_1)(ax_2+a\ln x_2)>ae \text{ 即证}}$.

设 $x_1<x_2$，$x_i+\ln x_i=p_i$

则：$e^{p_1}=ap_1$，$e^{p_2}=ap_2$，要证 $p_1p_2>\frac{e}{a}$？对均方向是反的

Q：p_1,p_2 保正吗？

Q：这个和 lagrange 中值有关吗？

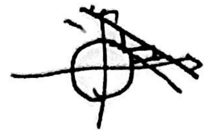
→考虑a属性

比代：$\frac{p_1}{p_2}=t<1$，$p_2=\frac{\ln t}{t-1}$，$\Rightarrow p_1p_2=\frac{e^{\frac{t+1}{t-1}\ln t}}{a^2}$，那证 $e^{\frac{t+1}{t-1}\ln t-1}>a$，

显然 $e^{\frac{t+1}{t-1}\ln t-1}>e$，但 $a>e$ ...，试以 $a=\frac{e^{p_2}}{p_2}=h(t)$，但：$\ln t$：呈大认 $t>0$，说什么？

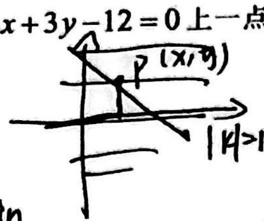
引论 ⟺ 不一定　　可以证（$\ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$）

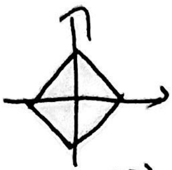
（代偏）



平移相切，折线距离，化成一条线段

1.在平面直角坐标系中，定义 $d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为两点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 之间的“折线距离”，则圆 $x^2+y^2=1$ 上一点 P 和直线 $4x+3y-12=0$ 上一点 Q 的“折线距离”的最小值为________.



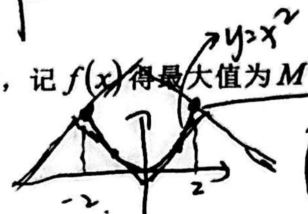


曼哈顿距离

折线距离，最大值的min

2.设 $f(x)=|x^2+a|+|x+b|(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$ 时，记 $f(x)$ 得最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________.

(x,x^2) $(-b,-a)$



标对角线长度的一半

3. 已知 $a,b\in R$，设函数 $f(x)=|\tan x+a|+|\sin x\cos x+b|,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

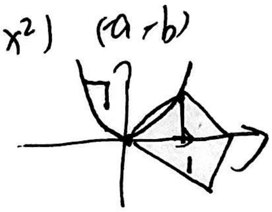
值取到的之max 值取不到的之找出

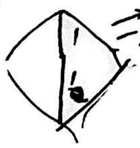
4.已知 $a,b\in R$，设函数 $f(x)=|\sin x+a|+|\cos 2x+\sin x+b|$ 的最大值为 $G(a,b)$，则 $G(a,b)$ 的最小值为 $\frac{49}{16}$.

5.设函数 $f(x)=|\ln x+a|+|x+b|(a,b\in\mathbf{R})$，当 $x\in[1,e]$ 时，记 $f(x)$ 最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为 $\frac{e}{2}$.

6.已知函数 $f(x)=|x+a|+|x^2+b|$，$x\in[0,1]$，设 $f(x)$ 的最大值为 M，$M_{\min}=1$，则 a 的取值范围为 $(-1,-\frac{1}{8})$

(x,x^2) $(a,-b)$





(22期中)

7.设点 $P(x_1,y_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 上，点 $Q(x_2,y_2)$ 在直线 $x+2y-8=0$ 上，则 $3|x_1-x_2|+5|y_1-y_2|$ 的最小值为 10.

2015 新国Ⅰ. $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1) 讨论$f'(x)$的零点个数

(2) 证明：当$a>0$时，$f(x)\ge 2a+a\ln\frac{2}{a}$：隐零点反代

解(1). $f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}$，老熟人　①当$a\le 0$，$f'(x)>0$，完全没有零点。

②当$a>0$，$f'(x)$显然单调递增　新教材：$x\to 0$...　$x\to+\infty$...　∴$(0,+\infty)$上存在唯一零点x_0.

但若我要找点呢？即怎么把这个x_0描述出来.

step Ⅰ、$f'(a)=2e^{2a}-1$.（设计：让$\frac{a}{x}$去死.）>0.

step Ⅱ：<0的设计：$2e^{2x_m}<\frac{a}{x_m}$，插值 $2e^{2x_m}<2e<\frac{a}{x_m}$，解得 $0<x<\frac{1}{2}$，$x<\frac{a}{2e}$

交集：$0<x<\min\{\frac{1}{2},\frac{a}{2e}\}$：　取 $\underbrace{0<b<\min\{\frac{1}{2},\frac{a}{2e}\}}_{\text{这些值都能取}}$，得 $2e^{2b}<2e<\frac{a}{b}$. ∴$f'(b)<0$ ✓

(2). 设此零点为x_0

$f(x_0)=e^{2x_0}-a\ln x_0$

$f'(x_0)=2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$　$\Rightarrow f(x_0)=\frac{a}{x_0}-a\ln x_0$.　但是，这样化简真的好吗.

第2步 ①. 指项用一次　②取完对数再用一次.

即证. $\frac{1}{x_0}-\ln x_0\ge 2+\ln\frac{2}{a}$. 是对的，但怎么让$\ln x_0$去死

换法：$2e^{2x_0}=\frac{a}{x_0}$　$\Rightarrow -a\ln x_0=2ax_0-a\ln\frac{a}{2}$　$=2ax_0+\underbrace{a\ln\frac{2}{a}}_{\text{东西打来？}}$.

∴$f(x)_{min}=f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}$　即得.

①. 找点是最最严格的方式，一般"证明题"中需写，解答中可以⟹

②xbb：无非是你找得还不够大而已/不够小而已（参见2018浙江）

③教材中写⟹，但没写成存在唯一零点。

（大不了扣1~2分，但最好还是写出找点

（五）切比雪夫多项式

对任意正整数 n，$\cos n\theta$ 可以表示为 $\cos\theta$ 的首项系数为 2^{n-1} 的 n 次整系数多项式，这种多项式即称为切比雪夫多项式．我们可以用数学归纳法证明，请大家自行完成，下面再介绍一种利用复数的方法．

设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则 $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$．

由棣莫弗定理及二项式定理，比较两边的实部可得

$$\begin{aligned}\cos n\theta&=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\\&=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+C_n^4\cos^{n-4}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2-\cdots,\\&=g(\cos\theta)\end{aligned}$$

即 $\cos n\theta=T(\cos\theta)$，其中 $T(x)$ 为 n 次多项式．

$T(x)$ 的首项系数为 $1+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$．

设切比雪夫多项式的表达式 $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$，换元，令 $x=\cos\theta$，得到 $T_n(x)$ 的表达式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$，$n=1,2,3,\cdots$ 但要写出通项是困难的，仅对 n 较小的情况下，我们可以较轻松地求出具体式子．

切比雪夫多项式有一些重要性质，记 n 次的切比雪夫多项式为 $T_n(x)$．

(1)递推关系：$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$，$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$；

(2)零点和极值点：$T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 中有 n 个单根，分别为

$$x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)(k=1,2,\cdots,n).$$

$T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 中有 $n+1$ 个极值点，分别为 $x_k=\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)(k=0,1,2,\cdots,\ n)$，且对于每个极值点，其极值为 $T_n(x_k)=(-1)^k$．

所以在 $[-1,1]$ 上，切比雪夫多项式有 n 个单根与 $n+1$ 个极值点．

(3)在所有首项系数相同的实系数多项式中，切比雪夫多项式是使得多项式在 $[-1,1]$ 上的绝对值的最大值最小的多项式．

定理：任给 n 次实系数多项式，首项系数为 1，那么一定存在 $x_0\in[-1,1]$，使得 $|f(x_0)|\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$．

另外的习题见大单元64讲·习题训练

专题 30　函数不动点与稳定点模型

不动点：已知函数 $y=f(x), x\in I$，若存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的不动点。

不动点实际上是方程组 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$ 的解 (x_0, y_0) 的横坐标，或两者图象的交点的横坐标。

当然，这个方程组根据函数 $y=f(x)$ 的不同，可能有多解。

例如 1：$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x \end{cases}$ 的解只有一个 $(1,1)$，故函数 $y=2x-1$ 有一个不动点 $x_0=1$

例如 2：$\begin{cases} y=2x^2-1 \\ y=x \end{cases}$ 的解为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,1)$，故函数 $y=2x^2-1$ 有两个不动点 $-\frac{1}{2},1$

稳定点：已知函数 $y=f(x), x\in I$，若存在 $x_0\in I$，使得 $f(f(x_0))=x_0$，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的稳定点。

很显然，若 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的不动点，则 x_0 必为函数 $y=f(x)$ 的稳定点。

证明是非常简单的！因为 $f(x_0)=x_0$，所以 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，即 $f(f(x_0))=x_0$，故 x_0 也是函数 $y=f(x)$ 的稳定点。

反之，有没有不是不动点的稳定点呢？答案是肯定的！

例如 3：设 $f(x)=2x-1$，令 $2(2x-1)-1=x$，解得 $x=1$

故函数 $y=2x-1$ 有一个稳定点 $x_0=1$

例如 4：$f(x)=2x^2-1$，令 $2(2x^2-1)^2-1=x$，因为不动点必为稳定点，所以该方程一定有两解 $x=-\frac{1}{2},1$，由此因式分解，可得 $(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1)=0$

还有另外两解 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，故函数 $y=2x^2-1$ 的稳定点有 $-\dfrac{1}{2},1,\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ 其中 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ 是稳定点，但不是不动点。

请看下面四个图形，分别对应例 1、2、3、4.

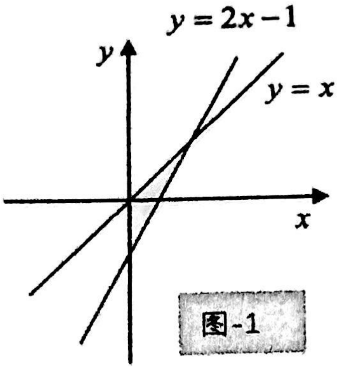


图-1

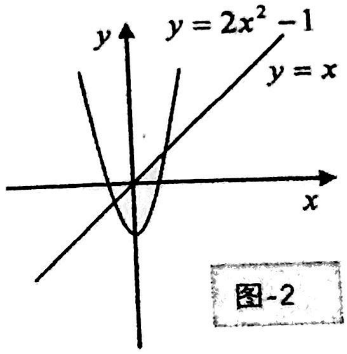


图-2

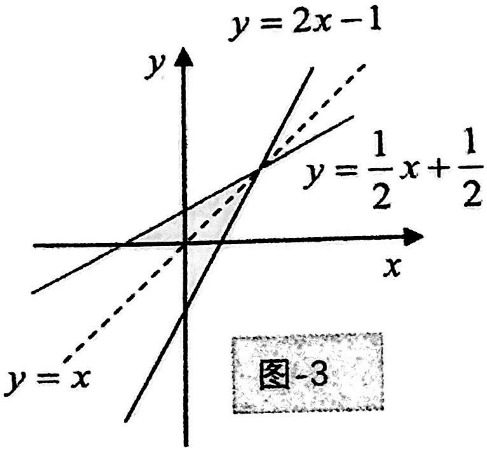


图-3

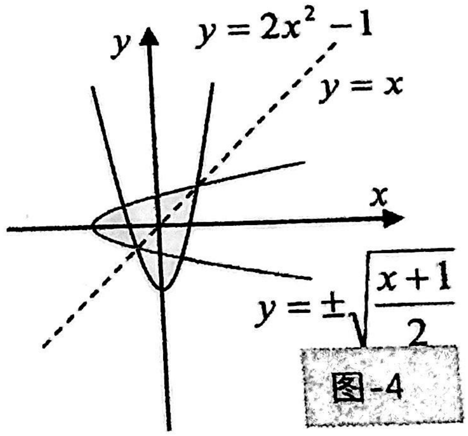


图-4

由此，清晰可见，不动点是函数图象与直线 $y=x$ 的交点的横坐标，而稳定点是函数图象与它的反函 数（可以是多值的）的图象的交点的横坐标. 根据例 1 和例 3，我们可以给出命题：

若函数 $y=f(x)$ 单调递增，则它的不动点与稳定点是完全等价的。

证明：若函数 $y=f(x)$ 有不动点 x_0，显然它也有稳定点 x_0；

若函数 $y=f(x)$ 有稳定点 x_0，即 $f(f(x_0))=x_0$，设 $f(x_0)=y_0$，则 $f(y_0)=x_0$，

即 (x_0,y_0) 和 (y_0,x_0) 都在函数 $y=f(x)$ 的图象上，

假设 $x_0 > y_0$，因为 $y=f(x)$ 是增函数，则 $f(x_0)>f(y_0)$，即 $y_0 > x_0$，与假设矛盾;

假设 $x_0 < y_0$，因为 $y=f(x)$ 是增函数，则 $f(x_0)<f(y_0)$，即 $y_0 < x_0$，与假设矛盾;

故 $x_0 = y_0$，即 $f(x_0)=x_0, y=f(x)$ 有不动点 x_0.

例 1 、函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且 $f(x)=x$ 没有实数根，问：$f(f(x))=x$ 是否有实数根？证明你的结论.

解法一：（没有实根问题转化为证明不等式恒成立）

$f(f(x))=x$ 是没有实数根.

证明：因为 $f(x)=x$ 没有实数根，所以 $f(x)>x$，或 $f(x)<x$，

当 $f(x)>x$ 时，再以 $f(x)$ 代 x 有 $f(f(x))>f(x)$，所以 $f(f(x))>x$，

当 $f(x)<x$ 时，再以 $f(x)$ 代 x 有 $f(f(x))<f(x)$，所以 $f(f(x))<x$，

所以 $f(f(x))=x$ 是没有实数根.

解法二：（用反证法)

$f(f(x))=x$ 是没有实数根.

证明:

若存在 $x=x_0$ 使得 $f(f(x_0))=x_0$，

令 $f(x_0)=t$，则 $f(t)=x_0$，

即有 (x_0,t) 和 (t,x_0) 是 $y=f(x)$ 的点，显然这两点关于 $y=x$ 对称，

所以 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 必有公共点，从而 $f(x)=x$ 有实数解，与已知矛盾.

所以 $f(f(x))=x$ 是没有实数根.

规律总结：替换法是一个重要的方法

例 2 、设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}(a\in R,e$ 为自然对数的底数）．若存在 $b\in[0,1]$ 使 $f(f(b))=b$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $[1,e]$　　B. $[1,e+1]$　　C. $[e,e+1]$　　D. $[0,1]$

解析：$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$，根据复合函数的单调性，可以判断该函数为增函数。

又因为存在 $b\in[0,1]$ 使 $f(f(b))=b$，即有稳定点 b，

所以它必有不动点 $b\in[0,1]$，使得 $f(b)=b$，

即 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}=x$ 在 $x\in[0,1]$ 有解，

整理可得，$a=e^x+x-x^2$，在 $x\in[0,1]$ 有解。

令 $g(x)=e^x+x-x^2,x\in[0,1]$，

$\because g'(x)=e^x+1-2x>1+1-2=0,\therefore g(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 单调递增。

$g(0)=1,g(1)=e,a\in[1,e]$，故选择 A,

例 3 、设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}(a\in R,e$ 为自然对数的底数). 若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0) 使 $f(f(y_0))=y_0$ 成立，则 a 的取值范围是 ( )

A. $[1,e]$　　B. $[e^{-1}-1,1]$　　C. $[1,e+1]$　　D. $[e^{-1}-1,e+1]$

解析：$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$，根据复合函数的单调性，可以判断该函数为增函数，

又因为存在 $y_0\in[-1,1]$ 使 $f(f(y_0))=y_0$，即有稳定点 y_0，

所以它必有不动点 $y_0\in[-1,1]$，使得 $f(y_0)=y_0$

即 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}=x$ 在 $x\in[-1,1]$ 有解，显然 $x\in[-1,0)$ 是无解的.

整理可得，$a=e^x+x-x^2$，在 $x\in[0,1]$ 有解。

令 $g(x)=e^x+x-x^2,x\in[0,1]$

$\because g'(x)=e^x+1-2x>1+1-2=0,\therefore g(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 单调递增，

$g(0)=1,g(1)=e,a\in[1,e]$，故选择 A.

例 4、设函数 $f(x)=e^x+2x-a(a\in R,e$ 为自然对数的底数)，若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0)，使得 $f(f(y_0))=y_0$，则 a 的取值范围是（　　）.

A.$[e^{-1}-1,e+1]$　　B. $[1,e+1]$　　C. $[e,e+1]$　　D. $[1,e]$

【答案】易知 $f(x)=e^x+2x-a$ 为单调递增函数. 同例 1，有 $f(y_0)=y_0$.

曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0)，使得 $f(y_0)=y_0$，等价为: $f(x)=e^x+2x-a=x$ 在 $[-1,1]$ 上存在解.

即 $e^x+x=a$ 在 $x\in[-1,1]$ 上有解.

设 $h(x)=e^x+x,h'(x)=e^x+1>0$，则 $h(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，所以

$\frac{1}{e}-1=h(-1)\le h(x)\le h(1)=e+1$. 故 $a\in\left[\frac{1}{e}-1,e+1\right]$. 故选 A.

不等横问题*

例:(九省联考T7) $0<a<b<c<1$, $b\geq 2a$ 或 $a+b\leq 1$, 问 $\max\{\underbrace{b-a, c-b, 1-c}_{暴力}\}_{min}$.

改编: ~~x,y 正实, $\max\{x-2y, \frac{y}{x^2}+\frac{1}{y^2}\}_{min}$~~

1. 描述的是 a,b,c 的相对位置. → 重设数术.

[猜想!]

① $b\geq 2a \Rightarrow b-a\geq a$. 记 $H=\max\{b-a, c-b, 1-c\}$ 成立.

$4H\geq b-a+c-b+1-c+a>1 \rightarrow H\geq\frac{1}{4}$, 当仅: $b=2a$, $b-a=c-b=1-c$

$2H\geq 2c-2b$, $\rightarrow H\geq 2-2c \Rightarrow 5H\geq 1 \Rightarrow H\geq\frac{1}{5}$.

② $a+b\leq 1$: $H\geq b-a\geq 2b-1$,

$-a\geq b-1$

从而 $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{3}{5}$, $c=\frac{4}{5}$. (还是等间距分布).

Q、为什么这样放, 问题的本质是什么, 与线性规划有关吗?

例: 已知 s,t 均 $\in[-1,1]$, 问 $\{s^2-t^2+1, |s-2t|\}$ 的 max 的 min

配凑猜取等.

设 $\max\{s^2-t^2+1, |s-2t|\}=M$. 则. $M\geq s^2-t^2+1$, → 配 $\lambda M\geq\lambda s^2-\lambda t^2+\lambda$ $(\lambda>0)$

$M^2\geq s^2-4st+4t^2$

$\Rightarrow \lambda M+M^2\geq(1+\lambda)s^2-4st+(4-\lambda)t^2+\lambda$

$\geq\left[2\sqrt{(1+\lambda)(4-\lambda)}-4\right]st+\lambda$. (均不)

或法: $M-1=s^2-t^2$ → 配相加

直接配: $(M-1)(1-4)\geq M^2 \Rightarrow M$ ...

即 $4s^2-4st+t^2\geq 0$

或法: $s^2-t^2+1=M$
$|s-2t|=M$: 等轴双曲线的线性规划

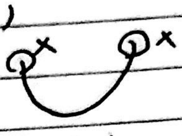
↳ 打线, 找到切

函数　　$\nearrow$ -阶导 二阶导

最值(求/用)，极值，拐点，稳定点，不等式，单调性，单调区间闭连续，不闭开集。

变号零点 $f'(x)$ ，$y=|x|$ 极值点处不可导。

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\nearrow$ (中等)



阶段：左右2边
　(极值)
　　→不可以是端点。

*极值点，零点都不是值

*费马定理，$f(x)$ 在D上可导。若 x_0 为 $f(x)$ 极值，必有 $f'(x_0)=0$.

(1906浙考) $4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{1+x}-\ln x$. 求极值。

$f(x)=$

$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}$. ①猜零点 $x=1$

② 构造 $x-1$：代入 $x=1$　$2-1-1 \Rightarrow 1+1-1-1$

$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$，偏 $x-1$.

双变量间限制范围

(2022.7.浙江考)

$\vec{a},\vec{b}$ 为平面非零向量，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量模为1.
$|2\vec{a}-\vec{b}|=1$. 问 $(4\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$ 的范围.　　ans: $[3,4]$.

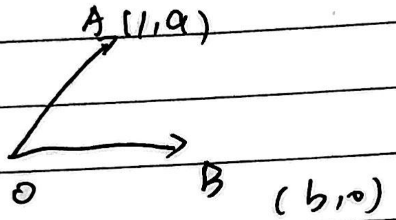
解：①.翻译. $|\vec{a}|\cos\theta\cdot\vec{e} = |\vec{a}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$.

或，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|$

$|2\vec{a}-\vec{b}|=1$. 平方: $\underbrace{4|\vec{a}|^2-1}_{|\vec{a}|\text{有范围}}=-|\vec{b}|^2+4|\vec{b}|$. 判别式，关于$|\vec{b}|$有解.

$$\begin{cases} 4\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=1. \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}|\geq 1 \Rightarrow [3,+\infty) \times \end{cases}$$

或：



$2\vec{a}=(2,2a)$　$\vec{b}=(b,0)$

$(2-b)^2+4a^2=1$.

$4\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=4b-b^2$.