数分I期末复习·题型：变上限积分

1. 含义：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导.

则 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

证明① $x\in(a,b)$. $x+\Delta x\in(a,b)$. $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

$=\int_x^a f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$

↳ 翻转上下限消元 (裂项)

由积分中值定理, $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $(\exists\xi)$，则 $=f(\xi)\Delta x$，$\xi\in(x,x+\Delta x)$

即证

② $x=a$，$\Phi'_+(x)=f(x)$ ③ $x=b$，$\Delta x<0$，$\Phi'_-(x)=f(x)$

定理：$\Phi(x)$ 即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 $(\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt)$

拓展：$\left[\int_a^x f(t)dt\right]'=f(x)$

$\rightarrow \left(\int_0^x x^2\sin t\,dt\right)'=\left(x^2\int_0^x \sin t\,dt\right)'$ 前后导

对t求积分

$\left[\int_x^b f(t)dt\right]'$：翻转

$\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]'=\frac{d\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt}{d\varphi(x)}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}$ (链)

$\left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right]'$：插值 $\int_a^{h(x)}f(t)dt+\int_{g(x)}^a f(t)dt$.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

构造辅助函数(?)

例. f在$[0,1]$连$(0,1)$可, $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx$. 证∃$\xi\in(0,1)$, 使$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

$\rightarrow f'(t)=2tf(t)$. ∴ 解微分方程. $\frac{dy}{dx}=2xy \Rightarrow \frac{1}{y}dy=2xdx \Rightarrow \ln|y|=x^2+C$.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY 模型题证明.

1. 康托尔定理：闭区间上的连续函数必定一致连续.

证明 ①. 由一致连续. 设闭区间上有两数列 $\{x_n'\}$ $\{x_n''\}$. 若不一致连续：有.

$\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n'-x_n''\}=0$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x')-f(x''))\neq 0$. 即 $|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_r$

闭区间 → 有界 ⇒ $\{x_n'\}$ 有一个收敛子列 x_{n_k}'. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0'$.

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}''=\lim\limits_{k\to\infty}[(x_{n_k}''-x_{n_k}')+x_{n_k}']=x_0'$，而 $a\leq x_0'\leq b$（保不等式性）.

↳ 拆和差. → $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|=|f(x_0')-f(x_0')|=0$

由归结原则：$\varepsilon_r\leq|f(x_n')-f(x_n'')|$

变下标写法.

矛盾

② 理解方式2.（确界，有限覆盖）.（见另一份）

③. 称 $[a,b]$ 坏：当 $|x'-x''|<\delta$ 但 $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$（不一致连续）

$[a,\frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2},b]$. 不可能全都一致连续，不然的话

取一个坏的 → 同理 …… 可构造区间套. ①包含 ②长度趋于0 ⇒ 找到 ξ.

$f(x)$ 在 $x=\xi$ 处连续. 即，$\forall\varepsilon,\exists\delta$，当 $|x-\xi|<\delta$，$|f(x)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

⇒ $U(\xi,\delta)$ 邻域：$|f(x)-f(y)|<2\varepsilon$，这矛盾了.

P53-55：两个定理同一个反例．P74-75．重要定理 P118 中值，导极，P120 分析，只记几个

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

所有但凡与Cauchy沾点边的定理（复习）

一、数列

1. 单调有界 ⇒ 有极限（充分）

"趋于" ⟺ 差值小于任意正数

2. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$ 时，$|a_n-a_m|<\varepsilon$ ⇒ 收敛（Cauchy）

3. 归结原则：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 ⟺ $\forall \{x_n\}$ 极限为 x_0，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 均存在（且与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 相等）

→ 用子列去逼，更换下标．

（先有δ再有ε，但答题要取 $\delta=\cdots\varepsilon$）

4. 任何有界数列必有收敛子列（致密性定理）．

二、函数

1. Cauchy：f 在 $U^\circ(x_0,\delta)$ 上有，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $\exists$ ⟺ $\forall \varepsilon>0$，$\exists\ \delta$，使得邻域内 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.（差值）

2. 连续．① $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ② $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

3. 一致连续：（条带法）① $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，就称一致连续

~~①~~ ②（⟺）$\forall \{x_n'\}\ \{x_n''\}\in I$．若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$.

易忘．

↓ 等价于．$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$.

4. Cauchy中值定理与L'Hospital法则．

设 f,g 在：① $[a,b]$ 连续 ② (a,b) 可导．③ $f'(x),g'(x)$ 不同时为0 ④ $g(a)\neq g(b)$

则 $\exists \xi\in(a,b)$，使得．$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. → $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

（Rolle．

则：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overset{\to 0}{f(x)-f(x_0)}}{\underset{\to 0}{g(x)-g(x_0)}}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，趋于 x_0 即得．

稿

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

理解归结原则：(海涅定理)

→刻画函数极限与数列极限。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$：任给 $\{x_n\}\to x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ↓ 函极；$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ ↓ 数极；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ↓ 函极.

类似的：一致连续的另一判据：一致连续 ⟺ 对于任意 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

> 小于任意正数.

证明：①. 若一致连续. $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta$，使得 $|x'-x''|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 即 $\underset{\text{任意}}{\forall\delta}$，必 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$|x_n-y_n|<\delta$. $\Rightarrow$

② 若不一致连续. $\exists\varepsilon$，使得 $\forall\delta$，：$|x'-x''|<\delta$ 但 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$.

取 δ 按照下标从 $1\to\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n')-f(x_n'')|$ 始终比 ε 大. 不以0为极限. 故知.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

确界原理

1.定理内容、叙述：⑴上确界：有界实数集：$\forall x\in$集，有 $x\le M$，
$\forall \varepsilon>0$，有 $x''\in$集，使 $x''>M-\varepsilon$
$\Rightarrow M$为上确界

⑵下确界：$x\ge m$，且 $\forall\varepsilon>0$ 均 $\exists x'$ 使 $x'<m+\varepsilon \Rightarrow m$为下确界

确界原理：非空有界数集，有上界则有上确界，有下界则有下确界。

2.历年考查（确界，有限覆盖，Cantor ...

⑴.若有界函f在$(0,1)$上↗，则 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$存在. / $\lim\limits_{x\to0^+}$ 存在 → 下确界.

证明：$f(x)$在$(0,1)$上有上确界 sup：$\forall x\in(0,1)$，$f(x)\le\sup$，且 $\forall\varepsilon>0$ $\exists x_0$ $f(x_0)\ge\sup-\varepsilon$

所以，$\forall x>x_0$：$f(x)>f(x_0)>\sup-\varepsilon$.

左极、$\forall x\in(1-\delta,1)$，$|f(x)-\lim|<\varepsilon$ ∴ 取 $\delta=1-x_0$，则 $|\sup-f(x)|<\varepsilon$.

$\Rightarrow$存且为sup.

2).$f(x)$在$[0,1]$上定义 证：$\sup\limits_{x\in[0,1]}f(x)-\inf\limits_{x\in[0,1]}f(x)=\sup\limits_{x',x''\in[0,1]}|f(x')-f(x'')|$

证、设$f(x')>f(x'')$. $f(x')-f(x'')\le\sup f(x)-\inf(f(x))$.

且 $\forall\varepsilon>0$ $\exists x_0,x_1$：$f(x_0)<\inf f+\varepsilon$，$f(x_1)>\sup-\varepsilon \Rightarrow$ 相减 $>\sup-\inf f-2\varepsilon$.

即证得（依据定义）

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

(闭)区间套定理与夹逼准则，实数完备性定理.

1. 闭区间套. $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. (被闭区间卡死)

中间夹出的 ξ 唯一 (对 a_i 用单调有界，逼收) $\to\exists$. 唯一: $|\xi-\xi'|\leq b_n-a_n$. 取极限(同一性)

证区间根 $[a,b]$ $\to$ 取 $\frac{a+b}{2}$ $\to 0$ ✓

$\to$ 不为0，再生成区间，$[a,\frac{a+b}{2}]$ ……

故得区间套且长度为 $\frac{b-a}{2^{n-1}}\to 0$. ，$f(左)\cdot f(右)<0$. ，把这个唯一的 ξ 取出.

对于 $f(左)\cdot f(右)$ 取极限(连续性) $\Rightarrow f(\xi)^2\leq 0\Rightarrow f(\xi)=0$.

2. 有限覆盖定理.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY 积分刷题.

$\Rightarrow \sin t = x$
$t = \arcsin x$

1. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx \overset{\triangle}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} d\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\operatorname{tg} t} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, d\ln|\sin t| = t\ln|\sin t| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin t| dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin t| dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\cos u| du = I$

$\cancel{\Rightarrow 2I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin 2t| dt \overset{2t=r}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|\sin r| d} \; \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cancel{\ln|\sin r| dr}$

$\cancel{\Rightarrow I = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \ln|\sin r| dr}$. $\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin t \cos t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln|\sin 2t| + \ln\frac{1}{2}] dt$.

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin 2t| dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2} dt. = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin 2t| dt + \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}. \overset{2t=r}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|\sin r| dr + \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin r| dr. - \frac{\pi}{2}\ln 2, = I - \frac{\pi}{2}\ln 2.$

2. 循环，$\int e^{-x}\cos x dx = \int e^{-x} d\sin x = \sin x e^{-x} - \int \sin x de^{-x} = \sin x \cdot e^{-x} + \int \sin x \cdot e^{-x} dx$,

$\int e^{-x}\sin x dx = -\int e^{-x} d\cos x = -(\cos x \cdot e^{-x} - \int \cos x de^{-x}) = \int \cos x de^{-x} - \cos x \cdot e^{-x}$

$= -\int \cos x e^{-x} dx - \cos x \cdot e^{-x} \Rightarrow \underline{\int e^{-x}\cos x dx} = e^{-x}\sin x - \underline{\int \cos x e^{-x} dx} - \cos x e^{-x}$

$\Rightarrow$ 原式 $= \frac{1}{2}(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x). = \frac{e^{-x}}{2} \cdot \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$: $+\infty$: $0 \times$ 有界 : 0.   0 : $\frac{1}{2} \times -1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$.

3. 伽马积分 $\int_0^{+\infty} 3t^{11} e^{-t^3} dt = \int_0^{+\infty} t^9 e^{-t^3} dt^3 \overset{\triangle}{=} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} (-x^3) de^{-x}$

$= e^{-x}(-x^3)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} d(-x^3) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^3 = \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-x} dx. = -\int_0^{+\infty} 3x^2 de^{-x}$

$\frac{-x^3}{e^x}$.

$= \int_0^{+\infty} 6x e^{-x} dx = [6e^{-x}(-x-1)] \Big|_0^{+\infty} = 6.$ ([illegible] 打八出)

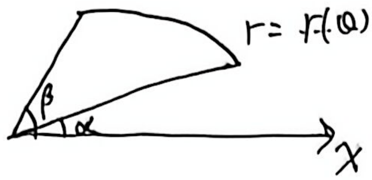
$\frac{x^3}{e^x}$

$(\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = (s-1)!$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

曲线弧长面积体积极坐标、

1. 以极坐标刻画曲线



$r=r(\theta)$. $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$. （小扇形：$\frac{1}{2}\theta r^2$）

2、以参数方程刻画曲线.（记忆）

$\begin{cases} y=p(t)=y(t) \\ x=q(t)=x(t) \end{cases}$ 大致推法：求出 $y=\dots(x)$，对此时求出 x 的上下界. 积分

$$A=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,dt. \quad t\in[\alpha,\beta]$$

3、旋转体体积，截面面积为 $\pi f^2(x)$. 由祖暅原理：$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$.

4. 弧长，$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t). \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ $\quad S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$.

$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ 推一下

极坐标：$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$.

直角坐标. $\begin{cases} x=x(t)\text{：参数也为}x \\ y=y(t). \end{cases}$ $\Rightarrow \int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$. $[a,b]$上.

5. 曲率：$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$. 若 $y=f(x)$，则 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. （来源：倾角增量. $\alpha(t)=\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$）

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

介值定理：f在$[a,b]$上连续，$f(a)\neq f(b)$，则：$\mu\in[f(a),f(b)]$，必有$f(x_0)=\mu$.

导函介值定理（Darboux定理），f在$[a,b]$上可导，$f'_+(a)\neq f'_-(b)$

k为介于$f'_+(a)$，$f'_-(b)$间的一实数，则至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=k$.

证：$F(x)=f(x)-kx$在$[a,b]$上可导，$F'_+(a)\cdot F'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)<0$

不妨$F'_+(a)>0$，$F'_-(b)<0$，保号，要证$\exists f'(\xi)=k$，即证$F'(\xi)=0$，

即取一个极值点即可（闭区间连续函取max不在端点）

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

Taylor 公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

题眼：$f(x)$在(a,b)有直到$n+1$阶的导数 ↳中有x_0

⇒展n阶，$n+1$阶用Lagrange

例：$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(x)\le 2$ 证 $\max\limits_{[0,1]} f(x)\le 2$

(导数信息最多的点，展开点x_0) （即$f(x)\le 2$恒）

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)x^2}{2}=1+\frac{f''(\xi)x^2}{2}\le 2$$

例. $f(x)$在$[0,1]$二阶可导. $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{[0,1]} f(x)=2$.

证：$\exists\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\le -16$

↓ 导数信息

设$f'(c)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2 \rightarrow \xi_1\in(c\sim 1) \\ f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(0-c)^2,\ \xi_2\in(0\sim c)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{-4}{(1-c)^2},\quad f''(\xi_2)=\frac{-4}{c^2}$$ 其必有一个

例：$f(x)$在$(-1,2)$上有2阶可导，$f'(\frac{1}{2})=0$. 证$\exists\xi\in(0,1)$使$|f''(\xi)|\ge 4|f(1)-f(0)|$

$\frac{1}{2}$处展开：$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2$

0代入，1代入

绝不等式

$$\Rightarrow 4|f(1)-f(0)|=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\le\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$$
$$\le\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$$

✓

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$. a,b为常数.

证 $|f'(x)|\le 2a+\frac{b}{2}$.

证、取x展开.

$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2 \quad 0<\xi_1<x$

$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2. \quad x<\xi_2<1.$

$\Rightarrow \underline{f(1)-f(0)}=f'(x)+\frac{1}{2}[\ \ldots\ldots\ ]$

全取绝对值

$2a$ $\qquad b.$

例、$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导. 证 $\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$(n\to+\infty)$

证：导信息，$1\Rightarrow x_0=1$.

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2.$

$[xf(x)=f(1)+(f(1)+f'(1))(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$

$[\ \frac{f(1)+f'(1)}{n(n+1)}=\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

(23~24 T7) $A, B, C_{n\times n}$，$r_C = r$，$AC = CB$. 求证：A, B 至少有 r 个特征值相同.

→ 考察矩阵的相抵标准型分解.

由 $r_C = r$ 设 $C = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，其中 P, Q 为可逆矩阵，代表的是初等行列变换.

因此 $AP\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QB \Rightarrow P^{-1}AP\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QBQ^{-1}$

(核心：调整矩阵在何边从而得到相似阵的形式 → 要求可逆!)

则：$P^{-1}AP \triangleq C$，即证 C, D 至少有 r 个特征值相同.
$QBQ^{-1} \triangleq D$.

$$C\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}D$$，考虑相似分块的可乘性，构造分法：

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_2 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ D_2 & D_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C_1 = D_1$. $C_2 = 0, D_3 = 0$，均为上三角分块矩阵 其特征值分别为2个□□的特征值

所以对于 C_1, D_1：他们共有 r 个特征值

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY 幂等矩阵合集.（LALU上ref）题小例

1. 22-23 T大(2)

(1) $A_{n\times n}$, $r(A)=r$. 证: $\exists P$可逆使$P^{-1}AP$的后$n-r$列全0

(2) $A_{n\times n}$, $r(A)=1$, A的主对角线上元素和为1

证$A^2=A$ ↳列空间1维⇒全成比例

⇒相标特殊形式.

Ans: (1) 由定义, $r(A)=r$, 对A按列分块(列秩)

$(\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_n)$, 其极大线性无关组维数为r.

~~A(A-E)基础~~ 由题可知: $\dim(\ker A)=n-r$.

设一组基为$a_{r+1},a_{r+2}\dots a_n$, 则Aa_{r+1}, $Aa_{r+2}\dots$ 均为0

P: 只需后n个是 ↓, 前面乱凑即可(扩展至基)

(2) 设$A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Q$, P,Q可逆(相标) $=(\ )_{n\times1}(\ )_{1\times n}=\alpha\beta^T$.

且很显然 $tr(A)=$内积 $(\sum a_ib_i)=1$

$\Rightarrow A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T=A$.

2. (24-25 回13)

$R[x]_3\triangleq V$, $\sigma\in L(V,V)$. $\sigma^2=\sigma$,

$Im(\sigma)=W$, $\sigma(1)=0$. 其中W: $f\in R[x]$ 且 $f(1)=0$.

求σ.

Ans: 设$\sigma(x^\alpha)=x^\alpha-1$.

① $\sigma(1)=0$.

② $\sigma(ax^2+bx+c)$ 可验证

} 一类典型构造

③ 像, 基的映射唯一 ⇒ σ唯一.

幂等矩阵的性质.（等价于投影）

$\sigma\to A$, $\sigma^2=\sigma$ 即$A^2=A$

(1). $|A|=|A|\times|A|\Rightarrow|A|=0$或1.

(2). 若A可逆, $\sigma^{-1}(\sigma^2)=\sigma^{-1}(\sigma)\Rightarrow$ 恒等映射 $\Rightarrow A=E$.

若A不可逆....

(2). $A^2=A$, 设$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A^2\alpha=A(\lambda\alpha)$

$=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha\Rightarrow\lambda^2=\lambda$ 故$\lambda=0$或1.

(3). 幂等矩阵可对角化., 结合(2),

必有 $tr=r$ (有几个1)

(即: $\exists P^{-1}AP=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$)

(4). $A(E-A)=0$

$(E-A)A=0$. (核空间与像空间

例: Im的求法.

按列划分, 初等行变换 取出首非零元所在列

对应矩阵的列向量, 列向量张成Im.

$(\dim(Im)=rA)$.

(5). $\sigma^2=\sigma$, 有$V=\ker\sigma\oplus Im\sigma$. ($Im\sigma=\ker(\overset{I_V}{E}-\sigma)$

$V=\ker\sigma+Im\sigma$. ; $r(\sigma)=r(\sigma^2)=\dots$

$\ker(\sigma)=\ker(\sigma^2)\dots$

证: 若$\alpha\in\ker\sigma\Rightarrow\sigma(\alpha)=0$

若$\alpha\in Im\sigma\Rightarrow\exists\beta$ s.t. $\sigma(\beta)=\alpha$.

由于$\sigma^2=\sigma$. 故: $0=\sigma(\alpha)=\sigma(\sigma(\beta))=\sigma(\beta)=\alpha$.

$\Rightarrow\ker\sigma\cap Im\sigma=\{0\}\Rightarrow$直和.

而 $\dim V=\dim\ker\sigma+\dim Im\sigma$, 即证.

$(\dim(\underbrace{\ker\sigma+Im\sigma}_{\text{是子空间且维数相等}})=\dim\ker+\dim Im-\dim\ker\cap im)=\dim V$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

(23-24) T3.

$B_1: \{\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(1,1,0),\ \alpha_3=(1,0,0)\}$ $\sigma(\alpha_i)=\beta_i$.

$B_2: \{\beta_1=(1,2,1),\ \beta_2=(2,3,3),\ \beta_3=(3,7,1)\}$.

(1) 求$\sigma(\alpha)=(3,6,2)$中的α (2). 证明：B_2是R^3的一组基 (3). 求σ在B_2下的矩阵表示.

解:(1). 由线性性，将$\sum k_i\beta_i$的k_i反解，代回$\sum k_i\alpha_i$即得.

(2). 整理，

①. 证明…是一组基：Ⅰ. 维数对得上 Ⅱ：线性无关：$\sum k_i\alpha_i=0$ 当且仅当 $k_i=0$.
(相关：∃不全为0, k_i 使得$\sum k_i\alpha_i=0$)

②. 证明…是线性映射：①. 加法 ②数乘 (③ 零向量)

↳可合并为 $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)$.

③ 证明：…是子空间：① 加法 ② 数乘 ③ 证明该空间非空 (验证零向量在里面).
若不在则非子空间.

→对于本题. 解方程即可. (本质：$AX=0$的零解. $|A|$. 线性无关)

3). (基变换公式)

①. 要求$B_1\to B_2$的过渡矩阵. 巧算：通过B_1作差构造自然基.

$\sigma(0,0,1)=(-1,-1,-2)$ $\sigma(0,1,0)=(-1,-4,2)$ $\sigma(1,0,0)=(3,7,1)$

$\Rightarrow \sigma$在 $\begin{matrix}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{matrix}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}3&-1&-1\\7&-4&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$
"E".

水放法(搓到放，轮置).

(参考pdf：线性变换视角)

自然基$\to\beta$：$P=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$

由定理：$P^{-1}AP=$ …

↓ 后变换 ↘ 映射.

中国·杭州 HANGZHOU CHINA

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

线代1期末复习典例·II.（较难题）.

(23-24-7b)

$A_{n\times n}$，$A^2-3A-2E$、(1) 证A可对角化 (2) $tr(A)$ 在 $n\sim 2n$.

解：①.引用Sylvestor不等式的"延展形式"

$r(A\pm B)-n \le r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min\{r(A),r(B)\}$

假设 $\lambda\neq 1,2$.
证法：$(A-\lambda E)(A-(3-\lambda)E)=0$
打开即可

因此：$A^2-3A+2E=(A-E)(A-2E)=0.$ $\Rightarrow$ λ只能在1，2里挑.

$\Rightarrow r(E)-n \le r(A-E)+r(A-2E)-n \le 0 \Rightarrow r(A-E)+r(A-2E)=n$ 恒成立.

②关于Hamilton-Caley定理的逆运用.

$|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$（行列式定义）$\triangleq f(\lambda)$

$\Rightarrow f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0$.，但不代表给你的矩阵多项式一定是$f(A)$.

例：（KS模拟考习）、$A=(a_{ij})_{4\times4}$，$(A^2-A-6E)(A^2+2A-3E)=0$ 且 $\underline{\underline{|A|=4}}$，求A特征多项式与证明A可对角化.

$[(A-\lambda E)x=0]$.

$\longrightarrow (A-3E)(A+2E)(A+3E)(A-E)=0 \Rightarrow$ A的特征值只可能是 ±3，-2，1. （几何≤代）

几何　代数

而 $\prod\lambda_i=|A|=4 \Rightarrow -2,-2,1,1.$ $\Rightarrow$ 特：$(\lambda+2)^2(\lambda-1)^2$ $\longrightarrow$ 需要 -2 $\rightarrow$ 对应基础解系有俩

1 $\rightarrow$ 对应基础解系有俩.

$\Rightarrow (A+2E)(A-E)=0$（猜可去）

$\Leftarrow$ 充分 $r(A-E)+r(A+2E)=4$

（恰取等）.

$\Rightarrow$ A可对角化.

③. 回到原题：$\lambda=1$：$(A-E)x=0$.，几何重：$n-r(A-E)$

$\lambda=2$：$(A-2E)x=0$.　几何重：$n-r(2E-A)$

$\Rightarrow$ 几何重总值为n $\Rightarrow$ A有n个线性无关的特征向量 $\Rightarrow$ 可对角化.

(2). $tr(A)=\sum\lambda_i$.即得证.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

浙江大學 ZHEJIANG UNIVERSITY

对秩零度化定理的整理.

① $\sigma: V_1 \to V_2$, $\dim(V_1)=n$, 则 $r(\sigma)+\dim(\ker\sigma)=n$. (取原像的维数)

③ A表示线性映射, $AX=0$ 的核空间维数 $=n-r(A)$

(18-19 七): $A\in M_{n\times n}(F)$, $r(A)=r$, $k\in\mathbb{Z}$ 且 $r\le k\le n$,

证: $\exists B_{n\times n}$ 使 $AB=0$ 且 $r(A)+r(B)=k$

$AB=0 \Rightarrow$ B的列向量均属于A的核空间. $\dim(\ker A)=n-r$.

由于 $r(A)+r(B)\le n \Rightarrow r(B)\le\dim(\ker A)$, 只需随机取几个拼起即可

(22-23 T四) $A_{l\times k}$ $B_{k\times n}$ $X_{n\times 1}$.

证明: 满足 $ABX=0$ 的 BX 构成一个线性空间 V, 且 $\dim V=r(B)-r(AB)$

→加法数乘封闭.

④: $(AB)X=0 \Rightarrow \dim\ker(AB)=n-r(AB)$, ~~核空间~~

设 V_1 为B的核空间, V_2 为AB的核空间, 而: 若 $BX=0$ 则 $ABX=0 \Rightarrow V_1\subseteq V_2$.

→构造.

• $A_{p\times m}$, $r_A=r$, $B_{m\times n}$, $r_B=s$. $r(AB)=t$. 令 $V=\{X\in R^n \mid ABX=0\}$, $W=\{Y\in R^m \mid Y=BX, X\in V\}$

求 $\underbrace{\dim V}_{n-t}$, $\dim W$.

↳ 设 σ 为 $V\to R^m$, $\sigma(X)=BX$. , $\operatorname{Im}\sigma=W$. $\underbrace{\ker\sigma=\{X\in V\mid BX=0\}}_{n-s}$

$$\dim W=\dim V-\dim\ker\sigma$$
$$=s-t.$$

(把线性映射写出)

但: 线性映射 $T: V\to W$ 的核为 K: $\dim V=\dim W+\dim K$ ✗

(W可以很大)

中国 杭州 HANGZHOU CHINA

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

这笔：$A_{m\times s}$ $r(A)=r$. 证明$\exists B\in M_{s\times n}$且$r(B)=\min\{s-r,n\}$使$AB=0$.

$\longrightarrow$ 理论：$r(B)\le n$ 列秩. $s-r$ 为$\dim\ker A$. 对得上，取小.

$\longrightarrow$ 构造：$A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$. $\min=r(B)$，$B=Q^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&E_m\end{pmatrix}$即得.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

概念辨析.

1. 线性空间和: $U+V=\{u+v \mid u\in U, v\in V\}$. $\begin{cases} U=\mathrm{span}\{(1,0)\} \\ V=\mathrm{span}\{(0,1)\} \end{cases} \Rightarrow U+V=$  $\Rightarrow$ 全局R^2.

$W=\mathrm{span}\{(1,1)\} \Rightarrow U+W \Rightarrow$  $\Rightarrow$ 全局R^2.

线性空间直和: $U\cap V=\{0\}$, 再$U+V$.

$\Rightarrow \dim(U\oplus V)=\dim U+\dim V$.

$U\oplus V=U\oplus W\Rightarrow V=W$. (假定, 所以消去律成立)

2. 基 → 像 定则映射定.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

循环求解与数归.(遇见一堆高次) → Jordan链.

例 (18-19 T…): $A\vec{\alpha_1}=\lambda\vec{\alpha_1}$, $\lambda \to \vec{\alpha_1}$. 若 $(A-\lambda E)\vec{\alpha_{i+1}}=\vec{\alpha_i}$, 证明 $\{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s\}$ 线性无关.

证明: 即证明 $\sum_{i=1}^{s}k_i\vec{\alpha_i}=0 \Leftrightarrow \forall i, k_i=0$. 下面给出证明.

$(A-\lambda E)\vec{\alpha_s}=\vec{\alpha_{s-1}}$

$(A-\lambda E)\vec{\alpha_{s-1}}=\vec{\alpha_{s-2}}$ $\Rightarrow \underline{(A-\lambda E)^{s-p}=\vec{\alpha_p}}$. (给出包含幂次的递推).

$\cdots$

$(A-\lambda E)\vec{\alpha_2}=\vec{\alpha_1}$, 而且 $\underline{(A-\lambda E)\vec{\alpha_1}=0}$

由数归: 假设 $S=k$ 时: $\sum_{i=1}^{k}k_i\alpha_i=0 \Leftrightarrow \forall i, k_i=0$.

则 $S=k+1$ 时: 如果存在 $c_1\vec{\alpha_1}+c_2\vec{\alpha_2}+\ldots+c_k\vec{\alpha_k}+c_{k+1}\vec{\alpha_{k+1}}=0$.

$$\Rightarrow \underbrace{c_1(A-\lambda E)^k\alpha_1}_{0}+c_2\underbrace{(A-\lambda E)^k\alpha_2}_{0}+\ldots+\underbrace{c_{k+1}(A-\lambda E)^k\vec{\alpha_{k+1}}}_{c_{k+1}\alpha_1}=0$$

$\Rightarrow c_{k+1}=0$. ⇒ 全为0.

(24-25 五): $A^n\beta=0$, $A^{n-1}\beta\neq 0$. $\begin{cases}(1). \beta, A\beta, A^2\beta\ldots A^{n-1}\beta \text{ 为一组基} \\ (2)\ A^n=0 \\ (3). A \text{ 以 } 0 \text{ 为特征值的特空 } \dim=1.\end{cases}$

证明: (1). 维数为 n ② 证 $k_0\beta+k_1A\beta+\ldots+k_{n-1}A^{n-1}\beta=0 \Leftrightarrow \forall i, k_i=0$.

乘 A^{n-1} (左) $\Rightarrow k_0A^{n-1}\beta=0 \Rightarrow k_0=0$.

乘 A^{n-2}: $\Rightarrow k_1=0$

$\cdots$ 即得证.

(2) $\forall\alpha\in R^n$ 使得 $\alpha=k_0\beta+k_1A\beta+\ldots+k_{n-1}A^{n-1}\beta$.

$\Rightarrow A^n\alpha=0 \Rightarrow A^n=0$

(3). $A\vec{\alpha}=0$: 即证 $\dim(\ker 6)=n-r(A)=1$ 即证 $r(A)=n-1$.

假设 ker 中有无关的 x_1, x_2.

由形式.

设 $x_1=\sum_{i=1}^{n}a_iA^{i-1}\beta$

$x_2=\sum_{i=1}^{n}b_iA^{i-1}\beta$.

(线性组合. ~~则~~, $A(k_1x_1+k_2x_2)$

$=\sum_{i=1}^{n}(k_1a_i+k_2b_i)A^i\beta=0$.

$\Rightarrow k_1a_i+k_2b_i=0 \to a_i:b_i=0 \Rightarrow$ 相关.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

线代Ⅰ期末复习之：二次型

一、半正定的判定：$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$，$A^T = A$，所有主子式（不仅仅是顺序主子式）均 ≥ 0 即可

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

二、不定：！$\left\{ \begin{array}{l} \text{正定} \\ \text{负定} \\ \text{半正} \\ \text{半负} \end{array} \right.$ $\longrightarrow$ 标准型系数有正有负（即：既存在正惯，也有负惯）.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

特征值代入类.

(1)(18-19 九) $A_{n\times n}$, $A^2-5A+5E_n=0$. 证明 $\forall r\in Q$, $A+rE_n$ 均可逆.

Way I: $\Leftrightarrow |A+rE_n|\neq 0 \Leftrightarrow$ A的特征值不为有理, 由 $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$,

$\Rightarrow A^2\vec{\alpha}-5A\vec{\alpha}+5E_n\vec{\alpha}=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+5=0$. 即证.

($A^2\vec{\alpha}=\lambda^2\vec{\alpha}$.   )

Way II. 设 $M=A+rE_n$, $\Rightarrow A=M-rE_n$, 代入, $M[M-(2r+5)E_n]=-(r^2+5r+5)E_n$

(整出一个 M 即可).

(2)(22-23). $A_{3\times3}$, $|A-E|=|A-2E|=|A+E|=0 \Rightarrow \lambda=1,2,-1$.

问 $|A+3E|$:

↓

$|A-\lambda E|=\prod(\lambda-\lambda_i)$, 两边代 -3 即可.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY 线代工期末复习之：多项式类

一、$R[x]_3$ 指的是 ax^2+bx+c：(x^{n-1})

二、"~~标准基~~"：对于 $R[x]_n$，一般而言取 $\{1, x, x^2 \dots x^{n-1}\}$

~~自然基~~ 对于 R^n，一般取 $\vec{e_1}=(1,0,0,0\dots0)$，$\vec{e_2}=(0,1,0,0\dots0)$ …
$\vec{e_{n-1}}=(0,0,0,0\dots1,0)$，$\vec{e_n}=(0,0,0\dots0,1)$.

三、基的取法.

例（23-24）：$R[x]_3$，$\sigma(p(x))=(2x+1)p'(x)+p(1)$，问 σ 的特征值&特征向量.

取基 $\{1, x, x^2\}$，若 $p(x)=1 \Rightarrow \sigma(1)=1$
若 $p(x)=x \Rightarrow \sigma(x)=2x+1+1=2x+2$
若 $p(x)=x^2 \Rightarrow \sigma(x^2)=4x^2+2x+1$.

$\Rightarrow$ 坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$（对应的矩阵）$\Rightarrow \lambda=1,2,4$. …

注：求 $R[x]_3$ 的一组基，使 σ 在此基下为对角矩阵：
※：以特征向量为基，那么线性映射的对应为对角阵，对角线上为 λ_i.

例：求 $R[x]_3$ 中 $f(1)=0$ 的一组基：$ax^2+bx-a-b=a(x^2-1)+b(x-1) \Rightarrow \{x^2-1, x-1\}$.
（注意消参数）

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App