$P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. $QA$ - .

而 $Q = 0$. 8/10

$$\left(\sum \lambda_1\right)^2 R^2 = \sum \lambda_1 \lambda_2 c^2 + \underbrace{\left(\sum \lambda_1\right)^2 \cdot PO^2}_{\text{取多=10多号}}$$

$$\geq \sum \lambda_1 \lambda_2 c^2$$

$$\cancel{A \to \lambda_1 a^2}$$

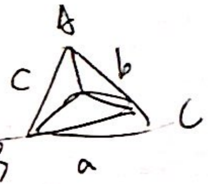
$$\left(\cancel{\sum \lambda_1 a^2} \cdot \cancel{R}^2\right) = \sum \lambda_1 a^2 \lambda_2 b^2 c^2$$

$$= \cancel{(abc)^2 \sum \lambda_1 \lambda_2}$$

$$\cancel{4R4}$$

~~取~~ 多方 $\lambda = 1$. (加权的外 ~~森~~ 比亚)

加权向量. 定义0. 走而 Cauchy 再而求解



---

$y - 2x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. ① $x$ 定义域

② 实根分布

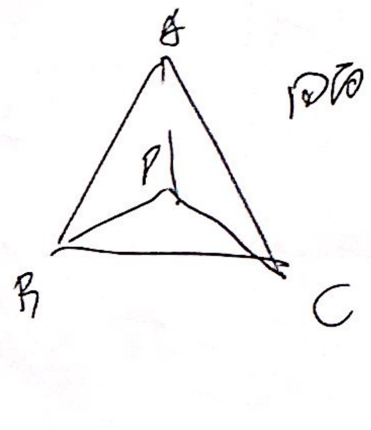
5多接6, 且多接9

6RV? (克莱尔定理)

$a', b', c'$ 构成△

$S = 6RV$

(证明: 单形)



面面对: AB $a$

CD $a'$

AC $b$

BP $b'$

AD $c$

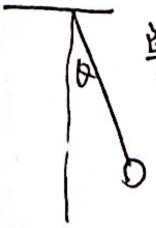
BC $c'$.

AD, BC 中点: M, N.

$$|MN|^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)$$

(类似空间托勒密定理)

小振动：一阶近似展开. eg. $\sin x \sim x$.



单摆. 转动惯量 $M = I\cdot\beta$.

$-mgl\sin\theta = ml^2\cdot\ddot{\theta} \Rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

注意正负号

一阶近似. $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

谐振形式, $m\ddot{x} + kx = 0$ 导一次

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C_0$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

能量.

*转动惯量的推导

$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = C_0$

$\frac{1}{2}m(\dot{\theta}l)^2 + (-mgl\cos\theta) = C_0$ $\because \theta \ll 1$ $\therefore \cos\theta \to 1 - \frac{1}{2}\theta^2$

以顶上为零势面

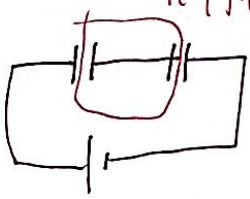
$\rightarrow \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = C_1$

$C = \frac{Q}{U}$. 插电介质, 极化 $\frac{E}{\varepsilon_r}$, 削弱

球 → 切球壳. 积

$\Rightarrow C' = \varepsilon_r C$.

电中性：孤立：不带电.



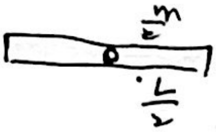
Gilhov. Deepseek

涡旋电场

涡旋势 没法定义

 ①以端点为轴，总质量$m$，长度为$L$ $\Rightarrow dm = \frac{m}{L}$（质量线密度）

$$\Rightarrow dm = \frac{m}{L} \cdot dr,\quad \int dm\, r^2 = \int_0^L \frac{m}{L} r^2 dr = \frac{m}{L} \cdot \frac{1}{3} r^3 = \frac{1}{3} m L^2.$$

 一半的惯量 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{L^2}{4} \times 2 = \frac{1}{12} m L^2$.

$$\oiint \vec{E} \cdot ds = \frac{\sum q}{\varepsilon_0},\quad \oiint B \cdot ds$$

$$\frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0} = 2\vec{E} \cdot \pi r^2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$（无限大板）

$\varepsilon$

112

镇海蛟川书院
曹谭忱

# 1 清华大学强基校测模拟试题2-数学

**35道不定项选择题,时间 90分钟**

D −4

1.甲、乙、丙三人用擂台赛形式进行乒乓球训练，每局2 人进行比赛，另1 人当裁判，每一局的输方当下一局裁判，而由原来的裁判向胜者挑战,半天训练结束时，发现甲共打了15 局，乙共打了21 局，而丙共当裁判5 局，那么整个训练中第15 局当裁判的是 ( )

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 无法确定谁当裁判

AD

2.某通信编码的技术方案基于矩阵的乘法，如：$(c_1\quad c_2)=(a_1\quad a_2)\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$，其中 $c_1=a_1b_{11}+a_2b_{21}$, $c_2=a_1b_{12}+a_2b_{22}$ .已知定义在 $\mathbf{R}$ 上不恒为0 的函数 $f(x)$，对任意 $a,b\in\mathbf{R}$ 有：$(y_1\quad y_2)=(f(a)\quad f(b))\times\begin{pmatrix} -1 & b+1\\ a-1 & 1\end{pmatrix}$，且满足 $f(ab)=y_1+y_2$，则 ( )

$f(ab)=af(b)+bf(a)$
$=-af(-b)-bf(-a)$

$\frac{f(ab)}{ab}=\frac{f(b)}{b}+\frac{f(a)}{a}$

$\frac{f(x)}{x}=\ln x$

$x\ln x$型

A. $f(0)=0$ B. $f(-1)=1$ C. $f(x)$ 是偶函数 D. $f(x)$ 是奇函数

C

3.设 $z=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，则 $z^3+\frac{z^2}{z^2+z+2}=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ C. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

C

4. 若关于 $x$ 的方程 $\sin 3x-a\sin x-8=0$ 成立，则实数 $a$ 的取值范围为 ( )

A. $[-9,7]$ B. $[-7,9]$ C. $(-\infty,-9]\cup[7,+\infty)$ D. $(-\infty,-7]\cup[9,+\infty)$

A

5.甲、乙、丙、丁四人进行网球比赛，规定首先甲与乙比、丙与丁比，这两场比赛的胜利者再争夺冠军，他们之间相互获胜的概率如下：

$0.3\times0.5\times0.3+0.3\times0.5\times0.8$

| | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
|---|---|---|---|---|
| 甲获胜概率 | - | 0.3 | 0.3 | 0.8 |
| 乙获胜概率 | 0.7 | - | 0.6 | 0.3 |
| 丙获胜概率 | 0.7 | 0.4 | - | 0.5 |
| 丁获胜概率 | 0.2 | 0.7 | 0.5 | - |

甲 甲—乙 丙? 丙—丁

0.15
1.1

则甲获得冠军的概率为 ( )

A. 0.165 B. 0.245 C. 0.275 D. 0.315

A

6.圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=136,BC=80,CD=150,DA=102$，则它的外接圆直径为 ( )

A. 170 B. 180 C. $8\sqrt{605}$ D. $\frac{11\sqrt{1109}}{2}$

A

7.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & 若x 为有理数\frac{q}{p},p 与q 互素,\\ 0, & 若x 为无理数.\end{cases}$ 那么满足 $x\in(0,1)$ 且 $f(x)>\frac{1}{7}$ 的 $x$ 的个数为 ( )

①x有理.

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

$\frac{1}{6}$

C

8.三个不同的实数 $x,y,z$ 满足 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2$，则 $x+y+z$ 等于 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

-6

9. 过点 $M(1,0)$ 的直线交抛物线 $y^2=4x$ 于 $A,B$ 两点，则 ( )

A. 以 $AB$ 为直径的圆与直线 $x=-\frac{3}{2}$ 没有公共点

B. 以 $MB$ 为直径的圆与 $y$ 轴只有一个公共点

C. $|AB|$ 的最小值为4

D. $|AM|$ 的最小值为2

ABC

10. $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，则可确定唯一 $\triangle ABC$ 的条件是 ( )

A. $a=1,b=2,c\in \mathbf{Z}$

B. $a=1,b=\sqrt{3},A+C=2B$

C. $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B,A=150^\circ,b=2$

D. $\cos A\sin B\cos C+\cos(B+C)\cos B\sin C=0,C=60^\circ,c=2$

B

11. 正方体的8个顶点中任取3个构成三角形，则三角形是等腰三角形的概率为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{4}{7}$　C. $\frac{3}{8}$　D. $\frac{5}{9}$

D

12. 函数 $y=7\sin x+\sin 2x$ 的最大值为 ( ) -4

A. $\frac{15}{2}$　B. $\frac{9\sqrt{15}}{4}$　C. 8　D. $\frac{15\sqrt{15}}{8}$

C

13. 已知集合 $A=\{k+1,k+2,\cdots,k+n\},k,n$ 为正整数，若集合 $A$ 中的所有元素之和为2023，则 $n$ 的最大值是 ( )

A. 14　B. [illegible]　C. 34　D. 119

D

14. 存在函数 $f(x)$ 满足：对 $\forall x\in \mathbf{R}$ 都有 ( )

A. $f(|x|)=x$　B. $f(|x|)=x^2+2x$　C. $f(|x+1|)=x$　D. $f(|x+1|)=x^2+2x$

A

15. 平面区域 $\left\{(x,y)\mid \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\geqslant xy\right\}$ 的面积为 ( )

A. $\pi+2$　B. $2\pi$　C. $\sqrt{3}\pi$　D. 6

ACD

16. 已知曲线 $C:(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$，则 ( ) -2

A. $C$ 关于原点对称

B. $C$ 只有两条对称轴

C. $C\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$

D. $C\subseteq\left\{(x,y)\middle||x|\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}\text{ 且 }|y|\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}\right\}$

AB

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$，则 ( )

A. $\{a_{n+1}^2-a_na_{n+2}\}$ 为常数列

B. $\{8a_{n+1}a_n-7\}$ 各项为平方数

C. $\{4a_{n+1}a_n-7\}$ 各项为平方数

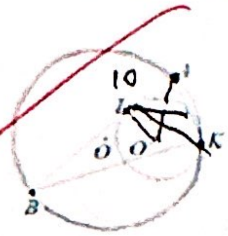
D. $a_n\equiv 1$ 或 $2 \pmod 9$

A

18. 设 $n$ 是正整数，则定积分 $\int_0^{2\pi}(x-\pi)^{2n-1}\left(1+\sin^{2n}x\right)\mathrm{d}x$ 的值 ( ) -4

A. 等于0　B. 等于1　C. 等于 $\pi$　D. 与 $n$ 的取值有关

19. 两个圆内切于 $K$，大圆的弦 $AB$ 与小圆切于 $L$，已知 $AK:BK=2:5$，$AL=10$，则 $BL$ 的长为 ( )



A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 27

20. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1$ 和 $F_2$, $P$ 为 $C$ 上的动点, 则　（　）

A. $a=\sqrt{2}b$ 时, 满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 的点 $P$ 有两个

B. $a<\sqrt{2}b$ 时, 满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 的点 $P$ 有四个

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\frac{a^2}{2}$

D. $\triangle PF_1F_2$ 的周长小于 $4a$

21. 54 张扑克牌, 将第1 张扔掉, 第2 张放到最后, 第3 张扔掉, 第4 张放到最后, 依次下去, 最后手上只剩下一张牌, 则这张牌在原来的牌中从上面数的第几张　（　）

A. 30　　B. 32　　C. 38　　D. 44

22. 三个互异的数 $a,b,c$ 相乘时可以有不同的相乘方法, 如 $(ab)c, (ba)c, c(ab), b(ca)$ 就是其中4 种不同的相乘方法. 设 $n$ 个互异数的不同相乘方法共有 $I_n$ 种, 则　（　）

A. $I_2=2$　　B. $I_3=12$　　C. $I_4=96$　　D. $I_4=120$

23. 在不超过99 的正整数中选出50 个不同的正整数, 已知这50 个数中任两个的和都不等于99, 也不等于100, 这50 个数的和可能等于　（　）

A. 3524　　B. 3624　　C. 3724　　D. 3725

24. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是2023 元集合 $\{1,2,\cdots,2023\}$ 的子集. 已知 $\forall 1\leqslant i\leqslant n, |A_i|$ 为奇数; $\forall 1\leqslant i\neq j\leqslant n, |A_i\cap A_j|$ 为偶数, 则 $n$ 的最大值为　（　）

A. 2022　　B. 2023　　C. 4044　　D. 4046

25. 若方程 $x^2-3x-1=0$ 的根也是方程 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 的根, 则 $a+b-2c=$ 的值为　（　）

A. $-13$　　B. $-9$　　C. $-7$　　D. $-5$

26. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5, a_2=13, \forall n\in\mathbf{N}_+, a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+6^n}{a_n}$, 则　（　）

A. $\forall n\in\mathbf{N}_+, a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

B. $\forall n\in\mathbf{N}_+, a_n$ 都是整数

C. $\forall n\in\mathbf{N}_+, a_n>4^n$

D. $\{a_n\}$ 中与2023 最接近的项是 $a_7$

27. $1!+2!+3!+\cdots+2023!$ 除以100 所得余数为　（　）

A. 3　　B. 13　　C. 27　　D. 73

A

28.设复数 $z$ 使得 $\frac{z}{10}$ 和 $\frac{10}{\bar{z}}$ 的实部和虚部都是小于1 的正数，记 $z$ 在复平面上对应的点的几何是图形 $C$，则 $C$ 的面积是 ( )

A. $75-\frac{25\pi}{2}$ B. $70-\frac{25\pi}{2}$ C. $75-\frac{15\pi}{2}$ D. $70-\frac{15\pi}{2}$

AD

29.已知 $x,y,z$ 满足 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，则 ( )

固定z.

对称，→导论构造

A. $z$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$ B. $z$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$ C. $xyz$ 的最小值为 $-\frac{4}{27}$ D. $xyz$ 的最大值为0

AC

30.若复数 $z$ 满足 $|z^2+1|=|z|$，则 ( )

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le|z|\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\le|z|\le\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

C. $\arg z\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ D. $\arg z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$

D

31.将四个1、四个2、四个3、四个4 填入一个 $4\times4$ 的表格，每个只填一个数字且16 个空格全部填满.若每行每列恰有两个偶数，则不同的填法共有 ( )

A. 4620 种 B. 323400 种 C. 6300 种 D. 441000 种

BD

32.已知 $z$ 是实部虚部均为正整数的复数，则 ( )

A. $\mathrm{Re}(z^2-z)$ 被2 整除 B. $\mathrm{Re}(z^3-z)$ 被3 整除 C. $\mathrm{Re}(z^4-z)$ 被4 整除 D. $\mathrm{Re}(z^5-z)$ 被5 整除

D

33.已知方程 $kx=\sin x$ 在区间 $(-3\pi,3\pi)$ 内有5 个实数解 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$，且 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，则 ( )

A. $x_5=\tan x_5$ B. $\frac{29}{12}\pi<x_5<\frac{5}{2}\pi$ C. $x_2,x_4,x_5$ 成等差数列 D. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$

C

34.甲乙丙丁四个人背后有4 个号码，赵同学说：甲是2 号，乙是3 号；钱同学说：丙是2 号，乙是4 号；孙同学说：丁是2 号，丙是3 号；李同学说：丁是1 号，乙是3 号.他们每人都说对了一半，则丙是几号 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

甲2 丙3

丁1 24

C

35.已知关于 $z$ 的方程 $z^{2023}-1=0$ 的所有复数解为 $z_i(i=1,2,\cdots,2023)$，则 $\sum_{i=1}^{2023}\frac{1}{2-z_i}=$ ( )

A. 是比 $\frac{2023}{2}$ 大的实数 B. 是比 $\frac{2023}{2}$ 小的实数 C. 是有理数 D. 不是有理数

-4

画图

$\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}$ $\frac{b}{a}$ $t+\frac{2}{t}$

$t$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$

# §1.3、代数式的恒等变换方法与技巧

## 【知识点睛】

### 一、代数式恒等的一般概念

#### 1. 基本概念

(1) 字母的允许值

在给定的数集中, 使一个代数式有意义的字母的值, 称为字母的允许值.

(2) 定义域

字母的所有允许值组成的集合称为这个代数式的定义域.

(3) 值

对于定义域中的数值, 按照代数式所包含的运算所得出的值, 称为代数式的值.

(4) 值域

值域这些值的全体组成的集合称为代数式的值域.

#### 2. 代数式恒等

两个代数式 $A, B$, 对于它们定义域的公共部分 (或公共部分的子集) 内的一切值, 它们的值都相等, 则称这两个代数式恒等, 记作 $A=B$.

#### 3. 恒等变换

把一个代数式变形成另一个与它恒等的代数式, 这种变形称为恒等变换.

### 二、恒等变换的方法与技巧

#### 1. 分类变换

当式的变换收到字母变值的限制时, 可对字母的取值进行分类, 然后对每一类进行变换, 以达到求解的目的. 分类变换方法适用于式的化简与方程 (组) 的化简、求解.

#### 2. 利用对称性

(1) 完全对称式

一个 $n$ 元解析式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为完全对称式, 当且仅当对于任意的 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$, 均有 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\equiv f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$.

(2) 完全对称式的性质

$a$. 性质一

若对于变元 $x_1,x_2$, $f$ 具有性质 $p$, 则对于任意的变元 $x_i,x_j$, $f$ 也具有性质 $p$.

$b$. 性质二

对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意排列 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}$, 有 $f(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

(3) 轮换对称式

一个 $n$ 元解析式称为轮换对称式, 当且仅当 $x_2$ 代 $x_1$, $x_3$ 代 $x_2$, $\cdots$, $x_n$ 代 $x_{n-1}$, $x_1$ 代 $x_n$ 时有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv f(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)$.

**3. 逆推分析**

从一个数学过程的结果出发, 按与原来相反的程序去推求初始条件的方法称为逆推分析法, 其特点是每一步逆推均可逆.

**4. 分拆组合**

把一个解析式根据某一运算性质分解成几个相对独立的部分, 其目的是使分解后的各部分在证明和求解中发挥作用, 把问题变更为若干个基本解析式的简单运算问题. 这就是所谓的化整为零策略.

所谓重新组合, 是指把几个独立的式子依据某一运算组合成新的式子, 其目的是使组合后的解析式变得简单, 以便于问题求解.

在解题中既要注意到题目各个部分, 又要从整体上把我题目. 因此, 必须把化整为零与重新组合的思想有机地结合起来, 此即为分拆组合.

**6. 消去部分**

所谓消去部分, 是指让一部分式子互相抵消, 或者让一部分式子代替另一部分式子. 例如, 在解方程中的加减消元法、代入消元法、比较消元法; 数列求和 (积) 中的交叉消去 (交叉相约) 等.

**7. 构造对偶式**

根据题中某式 $A$ 的结构特征, 构造 $A$ 的对偶式 $B$. 利用 $A$ 与 $B$ 之间的运算 (主要是加、减、乘) 求得 $A,B$ 的两种关系式, 从而使问题获得解决.

常见的对偶式有 $a+b$ 与 $a-b$; $ab$ 与 $\dfrac{a}{b}$; $\sin x$ 与 $\cos x$; $\tan x$ 与 $\cot x$; $\dfrac{a^n}{a+b}$ 与 $\dfrac{b^n}{a+b}$ 等等.

**8. 构造数列**

对于正整数有关的恒等式的证明，可通过构造数列来证. 其原理为: 欲证 $f(n) = g(n)$, 可构造数列 $a_n = f(n) - g(n)$( 或 $a_n = \dfrac{f(n)}{g(n)}$), 则只需证明下面两个结论成立:

(1)$a_1 = 0$( 或 $a_1 = 1$);

(2)$a_{n+1} - a_n = 0$( 或 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$) 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

**9. 数形结合**

对于某些特殊的代数式, 其有特殊的几何意义, 可利用这种几何意义将代数式之间的变量转换为几何量之间的变换, 使最终达到我们求解问题的目的.

## 【例题精讲】

**类型 1. 恒等变换基本问题**

**例 1.** 设 $p$ 为实常数, 试求方程 $\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x$ 有实根的充要条件, 并求出所有实根.

【第 5 届国际数学奥林匹克】

**例 2.** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实常数, $x$ 为实变数, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^{k-1} \cos(a_k + x)$, 若 $x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = 0$ 的两实根, 求证: $x_1 - x_2 = m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

【第 11 届国际数学奥林匹克】

**例 3.** 求最小的实数 $M$, 使得对所有的实数 $a, b, c$, 有 $|ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)| \leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$.

【第 47 届国际数学奥林匹克】

**类型 2. 分类变换**

**例 4.** 当 $x$ 取什么样的实数值时, 下列等式成立:

(1)$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$;

(2)$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$;

(3)$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$.

【第 1 届国际数学奥林匹克】

**例 5.** 在复数范围内解方程组 $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=3. \end{cases}$

**例 6.** 试求函数 $f(x,y)=6(x^2+y^2)(x+y)-4(x^2+xy+y^2)-3(x+y)+5$ 在区域 $A=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ 上的最小值.

**类型 3. 利用对称性**

**例 7.** 设 $x,y,z>0$, 求证: $(x+y+z)^5-(x^5+y^5+z^5)\geqslant 10(x+y)(y+z)(z+x)(xy+yz+zx)$, 并说明等号何时成立.

**例 8.** 设 $a,b,c$ 是三角形的边长, 求证: $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$, 并说明等号何时成立.

**例 9.** 设正实数 $a,b,c$ 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$, 求证: $\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}\leqslant\frac{3}{16}$.

【2009 年第 50 届国际数学奥林匹克预选题】

**类型 4. 逆推分析**

**例 10.** 设 $a,b,c,d,x,y$ 为正实数, 且满足 $xy=ac+bd,\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, 求证: $\frac{abx}{a+b+x}+\frac{cdx}{c+d+x}=\frac{ady}{a+d+y}+\frac{bcy}{b+c+y}$.

**例 11.** 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 设 $\triangle ABD,\triangle BCA,\triangle CDB,\triangle DAC$ 的内切圆半径依次为 $r_A,r_B,r_C,r_D$, 求证: $r_A+r_C=r_B+r_D$.

**例 12.** 已知 $a,b,c$ 为正实数, 求证: $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geqslant 0$.

【2010 年巴尔干地区数学奥林匹克】

**类型 5. 分拆组合**

**例 13.** 给出方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}$, 其系数满足下列条件:

(1)$a_{11},a_{22},a_{33}$ 是正数;

(2) 所有其他系数都是负数;

(3) 每个方程中系数之和是正数.

证明: $x_1=x_2=x_3=0$ 是已知方程组的唯一解.

108+2

# 1 清华大学强基校测模拟试题1-数学

**35道不定项选择题,时间 90分钟;单选2分,多选2N分;**

1. 如果$\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别是$\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值,那么

A. $\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

B. $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

C. $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

D. $\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

2. 设$a,b$ 是夹角为$30°$ 的异面直线,则满足条件“ $a\subseteq\alpha,b\subseteq\beta$ ,且$\alpha\perp\beta$ ”的平面$\alpha,\beta$ ( B )

A. 不存在　　B. 有且只有一对　　C. 有且只有两对　　D. 有无数对

3.删去正整数数列$1,2,3,\cdots$ 中所有完全平方数,得到一个新数列.这个新数列的第2015 项是 ( C )

A. 2020　　B. 2040　　C. 2060　　D. 2080

4.使得$p^3+7p^2$ 为平方数的不大于100 的素数$p$ 的个数为 ( C )

A. 0个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 以上三个答案都不对

5. 对于50 个黑球和49 个白球的任意排列(从左到右排成一行),则 ( D )

A. 存在一个黑球,它右侧的白球和黑球一样多

B. 存在一个白球,它右侧的白球和黑球一样多

C. 存在一个黑球,它右侧的白球比黑球少一个

D. 存在一个白球,它右侧的白球比黑球少一个

6. 已知$I$ 为$\triangle ABC$ 的内心$AB=2,AC=3,BC=4$ ,若$\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$ ,则$3\lambda+6\mu=$ ( C )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 若$m,n\in\left\{x\mid x=a_2\times10^2+a_1\times10+a_0\right\}$ ,其中$a_i\in\{1,2,3,4,5,6,7\},i=0,1,2$ ,并且$m+n=636$ ,则实数对$(m,n)$ 表示平面上不同点的个数为 ( B )

1~7 1~7 1~7

A. 60　　B. 70　　C. 90　　D. 120

8. 某矩形的长和宽均为正整数,面积为$A$ 平方厘米,周长为$P$ 厘米,则下面不可能为$A+P$ 的数是 ( B )

A. 100　　B. 102　　C. 104　　D. 106

9. 函数$f(x)=\dfrac{2\cos x+\sin x+4x^2+x}{2x^2+\cos x}$ 的最小值为$a$ ,最大值为$b$ ,则$a+b$ 的值为 ( B )

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

10.令$p=\sum\limits_{k=1}^{6}k\ln k$, 则使得$2^n\mid c^p$ 成立的最大正整数$n$ 为 ( C )

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

-4×4

11. 已知 $F_1, F_2$ 是椭圆与双曲线的公共焦点，$P$ 是椭圆与双曲线的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则椭圆与双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 （ D ）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

12. 已知非负实数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=1$，则下列说法正确的是 （ ）　Lagrange.　BC

A. $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$　　B. $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最小值为1

C. $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最大值为 $\frac{5}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{9}$　放缩　D. $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最大值为 $\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{9}$

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\lg\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right), n=1,2,\cdots, S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 等于 （ D ）

A. 0　　B. $\lg\frac{3}{2}$　　C. $\lg 2$　　D. $\lg 3$

14. $\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{5}\right)$ 的值为 （ B ）

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 前三个答案都不对

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2^n$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=5n-2$，那么集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{2013}\}\cap\{b_i\mid i\in\mathbf{N}_+\}$ 中的元素个数为 （ A ）

$2^1\ 2^2 \ldots\ 2^{2013}$　　$3,8,13\ldots$

A. 503 个　　B. 504 个　　C. 505 个　mod5余3　D. 506 个

16. 已知实数 $a,b$ 满足：当 $|x|\le 1$ 时，恒有 $\left|x^2+ax+b\right|\le 2$，则 （ ）　$|b|\le 2$.　ABD

A. $a\ge -2$　　B. $a\le 2$　　C. $b\ge -1$　　D. $b\le 1$

17. 黑板上写有 $1,2,\ldots,2017$ 这2017 个数，每次操作任意擦去其中的某三数 $a,b,c$，写上 $a+b+c$ 除以11的余数，则黑板上最后剩下一个数的所有可能为 （ C ）

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

就是 $\Sigma/11$

18. 关于 $x,y$ 的不定方程 $x^2+615=2^y$ 的正整数解有 （ B ）　mod3

A. 0 组　　B. 1 组　　C. 2 组　　D. 3 组

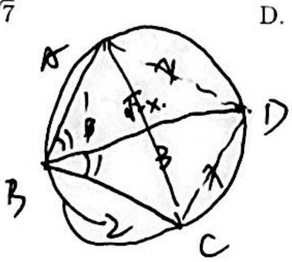
19. 使得三个等式 $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}=0, \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}=0, \frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{\lambda_3\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}=0$ 同时成立的 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的组数为 （ A ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$.

20. 在圆周上逆时针摆放了 $A,B,C,D$ 四个点，已知 $BA=1, BC=2, BD=3, \angle ABD=\angle DBC$，则该圆的直径为 （ D ）

A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. 以上三个答案都不对



$3x=$ $-10$

$f'(x)=e^x(x^2-3+2x)=e^x(x+3)(x-1)$

21. 设函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，则

A. $f(x)$ 有极小值，但无最小值

B. $f(x)$ 有极大值，但无最大值

C. 若方程 $f(x)=b$ 恰有一个实根，则 $b>\frac{6}{e^3}$

D. 若方程 $f(x)=b$ 恰有三个实根，则 $0<b<\frac{6}{e^3}$

22．设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上有定义，则

A. 当导数 $f'(0)$ 存在时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 存在切线

B. 当曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 存在切线时，导数 $f'(0)$ 存在

C. 当导数 $f'(0)$ 存在时，函数 $f(x^2)$ 在 $x=0$ 的导数值存在并为0

D. 当函数 $f(x^2)$ 在 $x=0$ 处的导数等于0时，导数 $f'(0)$ 存在

$f'(x^2)=$ $f(|x|)$

23. 已知不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a}\geq e$ 对任意正整数 $n$ 都成立，则实数 $a$ 的值可能为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

24.将集合 $\{n+2014,n+2015,n+2016,n+2017,n+2018,n+2019\}$ 可以分成两个不相交的非空子集，且这两个集合中元素乘积相等，这样的 $n$ 共有（　　）个

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 5

25. 已知正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2017}$ 满足 $a_1+\cdots+a_{2017}=2017$，则 $\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2017}+a_1}$ 的最小值是（　　）

A. 4034　　B. 2017　　C. $\frac{2017}{2}$　　D. $\frac{2017}{4}$

$f'(x)=2x$. 2.

26.曲线 $f(x)=x^2-1$ 与曲线 $g(x)=\ln x$

A. 在点 $(1,0)$ 处相交　　B. 在点 $(1,0)$ 处相切　　C. 存在相互平行的切线　　D. 有两个交点

27.已知曲线 $C:(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$，则

$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

$\rho^6=4\rho^2\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$\rho^2=\sin^2 2\theta$.

$\rho=\sin 2\theta$

A. $C$ 关于原点对称

B. $C$ 只有两条对称轴

C. $C\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$

D. $C\subseteq\left\{(x,y)\middle|\,|x|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9},|y|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\right\}$

28. 满足 $b\mid(a^2+1)$，且 $a^2\mid(b^3+1)$ 的正整数对 $(a,b)$ 的组数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

29.已知有相同焦点 $F_1,F_2$ 的椭圆和双曲线交于点 $P$，$|PO|=|F_1F_2|$，椭圆和双曲线的离心率分别是 $e_1$，$e_2$，那么 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=$（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 25

$a^2=b(b+c)$

30. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，且满足 $a^2=b^2+bc$，下列结论正确的是

A. $\angle A$ 可以为直角　　B. $\angle C$ 可以为直角　　C. $\angle A=2\angle B$　　D. $\angle C\geq\angle B$

$A=2B$.

31. 设 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,把复数 $z_1 = 2\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$ 在复平面上对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后得到的复数为 $z_2 = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ,那么 $\tan\varphi$ 等于 ( A )

A. $\frac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$　　B. $\frac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$　　C. $\frac{1}{2\tan\theta+1}$　　D. $\frac{1}{2\tan\theta-1}$

32. 若实数 $a, b, c$ 满足 $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = 0$ ,则 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 的最大值为 D

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. 0

数列

33. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正实数,且满足 $a_{n+1} = a_n - a_n^2\,(n \in \mathbf{N}_+)$ ,则下面说法正确的是 ( A )

A. 对任意正整数 $n(n \geq 2)$ ,均有 $a_n \leq \frac{1}{n+2}$

B. 存在正整数 $n_0\,(n_0 \geq 2)$ ,使得 $\cancel{a_{n_0} > \frac{1}{n_0+2}}$

C. 对任意正整数 $n$ ,均有 $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1 + \ln\frac{n+2}{3}$

D. 存在正整数 $n_0\,(n_0 \geq 2)$ ,使得 $\sum_{i=1}^{n_0} a_i \geq 1 + \ln\frac{n_0+2}{3}$

$a_2 \leq \frac{1}{4}$.

$a_n \leq \frac{1}{n+2}$

$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{n+1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{n+3}$ ?

$(n+1)(n+3) \leq (n+2)^2$.

34. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,若 $\forall x \in \mathbf{R}$ ,都有 $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x \geq -1$ 恒成立,则下列说法错误的是 ( B )

A. $a+b+c$ 可能取到的最大值为3

B. $a+b+c$ 可能取到的最大值为 $1+\sqrt{5}$

C. $a+b+c$ 可能取到的最小值为1

D. $a+b+c$ 可能取到的最小值为 $-1$

$\cos x = t$:

$4ct^3 + 2bt^2 + (a-3c)t + 1 - b \geq 0$

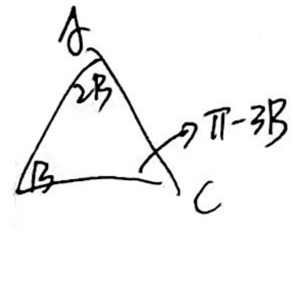
35. 已知点 $M$ 在圆 $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上,点 $N$ 在圆 $C_2:(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 上,则下列说法正确的是 ( ACD )

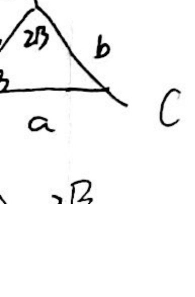
A. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围为 $[-3-2\sqrt{2}, 0]$

B. $|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|$ 的取值范围为 $[0, 2\sqrt{2}]$

C. $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2}-2, 2\sqrt{2}+2]$

D. 若 $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{ON}$ ,则实数 $\lambda$ 的取值范围为 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$



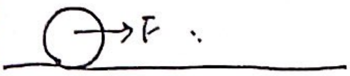




-4

$v^{-1} \to \frac{1}{v^2}$ $\quad -v^{-1} \to \frac{1}{v^2}$.

$\frac{dv}{dt} = -kv^2t \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -ktdt \Rightarrow \int \frac{1}{v^2}dv = -k\int tdt \Rightarrow -v^{-1} = -k\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{v} = -k\frac{t^2}{2} + \frac{1}{v_0}$.

纯滚。



动力：$F - f_{\text{摩}} = ma_c$. $\Rightarrow$ $F - f = m\beta R$
旋转：$fR = \frac{2}{5}mR^2\beta$. $\quad f = \frac{2}{5}mR\beta$. $\Rightarrow Ff$ 成比例.
$a_c = \beta R$

$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{x} = E_{\text{总}}$
$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{y} = E_{\text{总}}$ $\Rightarrow$ $\cancel{\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{x} = \frac{1}{2}m\frac{v_A^2y^2}{x^2}} - \frac{GMm}{x}$

角动量. $v_Ax = v_By$.

$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{x} = \frac{1}{2}m\frac{v_A^2x^2}{y^2} - \frac{GMm}{y}$. $\Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = GM\frac{y-x}{xy}$

$\frac{1}{2}v_A^2\frac{(y+x)x}{y} = GM \Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2x(x+y) = GMy \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{2GMy}{x(x+y)}$

$E_{\text{总}}: \frac{GMmy}{x(x+y)} - \frac{GMmy}{xy} = GMmy\left(\frac{y-x-y}{x(x+y)y}\right) = \frac{-GMm}{2a} = E_{\text{总}}$.

复系数多项式 $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ 根 $z_1, z_2 \dots z_n$.
且

$\frac{1}{3}ml^2\omega = 2flt$.
$ft = mv$.

地址：浙江省杭州市萧山区城厢街道拱秀路538号 电话：（0571）82722091 83711810

$\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ : 570

Helen

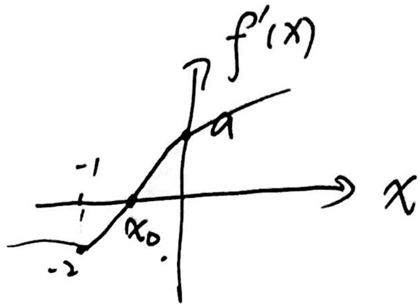
解：① $f(0)=ae^2 \Rightarrow a<0$ 一定不成立

② $a=0$：$f(x)=x^2\geq 0$ 恒成立

③ 若 $a>0$，考虑：$f(x)=x^2+axe^x+ae^2$.

$$f'(x)=2x+ae^x(x+1)$$

$$f''(x)=2+ae^x(x+2).$$




$x>0$ 时 $f(x)\uparrow$，$f(0)=ae^2>0$

$f'(-1)=-2<0$　　$f'(0)=a$

$f''(x)$ 在 $(-1,0)$ 之间为正 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 间 $\uparrow$

$x<-1$ 时，$f'(x)<0$　　$x>0$ 时 $f'(x)>0$

所以 $f'(x)$ 有唯一零点 $x_0\in(-1,0)$.

记 $f'(x_0)=0$．即：$2x_0+ae^{x_0}(x_0+1)=0 \Rightarrow ae^{x_0}\cdot x_0=-2x_0-ae^{x_0}$.

隐零点反代：$f(x_0)=x_0^2+ae^2+ax_0e^{x_0}$

$$=x_0^2+ae^2-2x_0-ae^{x_0}$$

$$=\underbrace{x_0^2-2x_0}_{>0}+\underbrace{a}_{>0}\underbrace{(e^2-e^{x_0})}_{>0}$$

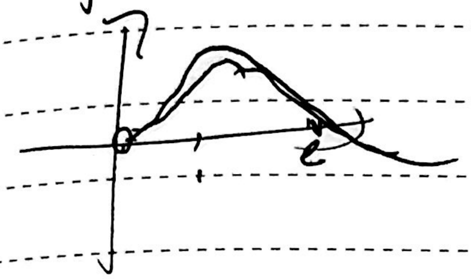
$>0$.

$\Rightarrow f(x)>0$ 恒成立.

$\ln x\geq 1$, $x\geq e$.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.　　$f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$ 其中 $f(x)=x(1-\ln x)$

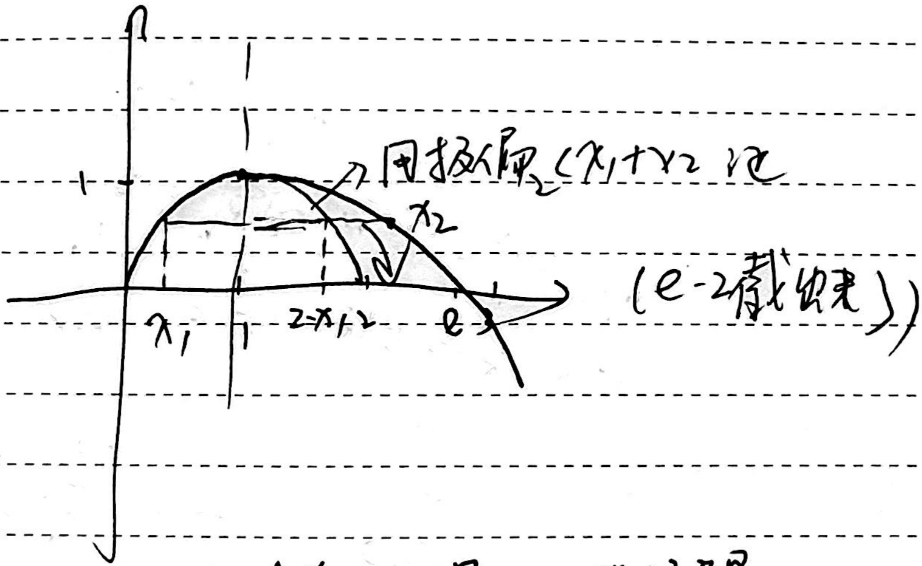
$f'(x)=1-\ln x+x\cdot -\frac{1}{x}=-\ln x$



$2<x_1+x_2<e$

$\Leftrightarrow 0<x_1+x_2-2<e-2$

$0<x_2-(2-x_1)<e-2$




一个数列单调,有界,必有极限.

证 $(1+\frac{1}{n})^n<3$　　$3-\frac{1}{n}$

单调:均不: $(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1\leq\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\dots+1+\frac{1}{n}+1}{n+1}\right)^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

有界,二项式定理展开,分数求和(等比压缩/裂项)

$C_n^n(\frac{1}{n})^n+C_n^{n-1}(\frac{1}{n})^{n-1}+\dots+C_n^0(\frac{1}{n})^0=1+1+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}\dots<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\dots<2+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}\dots$

$\frac{\sin C}{\sin C} = \frac{\cos B}{2\sin A} = \frac{\cos A}{3\sin B} = 1$

~~$\cos B = 2\sin A$~~

$\cos A = 3\sin B$

$\sin A = \frac{\cos B}{2}$

$9\sin^2 B + \frac{\cos^2 B}{4} = 1$

$36\sin^2 B + \cos^2 B = 4$

$\cos B = 2\sin A$

$\cos A = 3\sin B$

① 2式平方后化

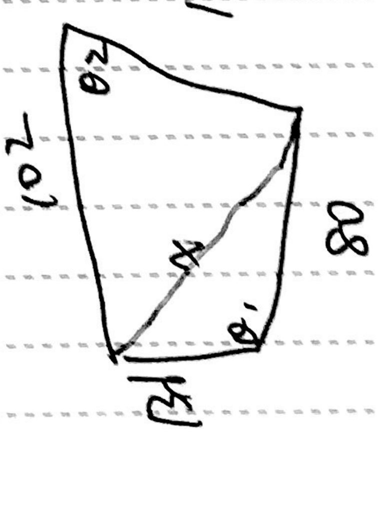
② 2边平方 化成正弦平方，化为同角关系式，解 $\cos^2 A$ $\cos^2 B$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$136 \times 136$: 816, 408, 136, 18496

$80^2 = 6400$

$24896$

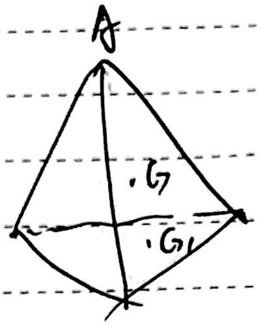



$\frac{136^2+80^2-x^2}{\cancel{2 \cdot 136 \cdot 80}} + \frac{150^2+102^2-x^2}{\cancel{2 \cdot 150 \cdot 102}} = 0$

32　45

$45(136^2+80^2-x^2)+32(150^2+102^2-x^2)=0$

$= 77x^2$



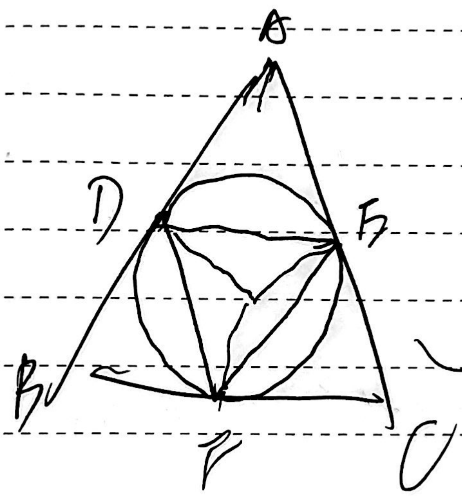
四面体的G

$AG:GG_1=3:1$

(link 正四面体 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$,

$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$)

$R\geq 3r$ (难证)



$\frac{1}{2}(\Sigma\lambda_1)^2\geq\Sigma\lambda_1\lambda_2\sin^2C$

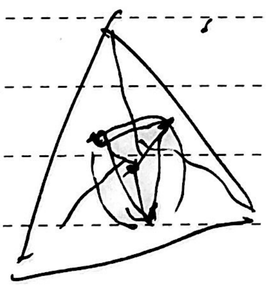
对△DEF用.

∠FDE 用∠C代:

$=\frac{\pi-C}{2}$

即得.

四面体,

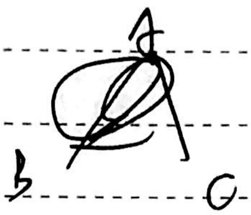


好四面体中,

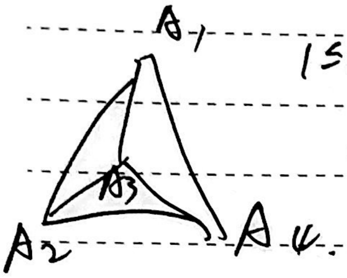
四面体对棱的距离

$V=\frac{1}{6}aa'\sin\langle a,a'\rangle d_{a-a'}$

体积



$A_i \to S_i$



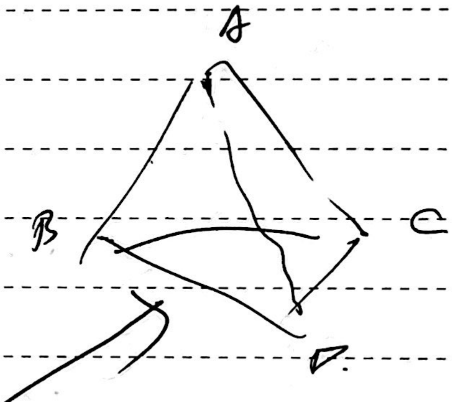
$1\le i\le 4$.

$S_i, S_j$ 夹 $\theta_{ij}$, $1\le i<j\le 4$

用面投射影定理

$A_1$投影M: $S_1=S_2\cos_{1,2}+S_3\cos\theta_{1,3}+S_4\cos_{1,4}$

六个二面角 (行列式、代数余子式)



$$\begin{cases} S_1=S_2\cos_{1,2}+S_3\cos_{1,3}+S_4\cos_{1,4} \\ S_2=\cdots \\ S_3=\cdots \\ S_4=\cdots \end{cases}$$

行列式

S的关系: 由投形求的

~~1~~ —— $\sum\lambda_i\lambda_j\cos\theta_{ij}$ 的 相关

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \cos\theta_{14} \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \end{vmatrix}=0 \text{ (有非零解)}$$

打开.

$\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{ab}{c}+c$. 由Abel变换，设 $a+b=X$，$ab=Y$

$\Rightarrow a^2+b^2=X^2-2Y$.

其中 $\frac{X}{2}\ge\sqrt{Y}$：$X\ge 2\sqrt{Y}$，$X^2\ge 4Y$.

$\cancel{\frac{X^2-2Y}{X}=\frac{Y}{c}+c\ge 2\sqrt{Y}}$

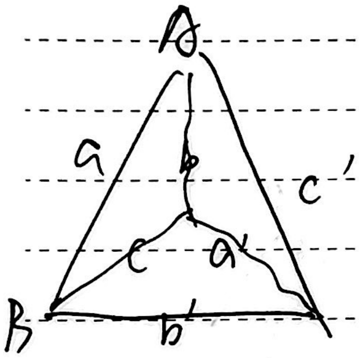
$\Rightarrow \cancel{X^2-2Y\ge 2X\sqrt{Y}}$

$ab=t$ $\frac{(a+b)^2-2t}{a+b}=\frac{t}{c}+c\ge 2\sqrt{t}$

$a+b-\frac{2t}{a+b}\ge 2\sqrt{t}$.

$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. $\Rightarrow \frac{1}{a+b}\ge\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$ $\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$\Rightarrow \frac{ab}{c}+c\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\sqrt{ab}$.




重构论形

$aa'+bb'\ge cc'$.

存在$\triangle(aa', bb', cc')$

类比托勒密

外接球半径$R$.

$S_\triangle=6RV_{锥}$

$=$ Helen.

用向量证

空间余弦定理

AB CD

对棱夹角公式

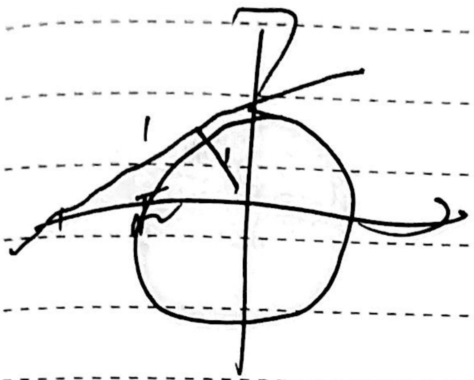
$\cos\langle a,a'\rangle=\frac{b^2+b'^2-c^2-c'^2}{2aa'}$

(令$c'=0$ / $c=0$ 退化成余弦定理)

一组对棱垂直的充要条件与另两组对棱有关

$$\frac{\sqrt{2}+\cos\theta}{\sin\theta}$$

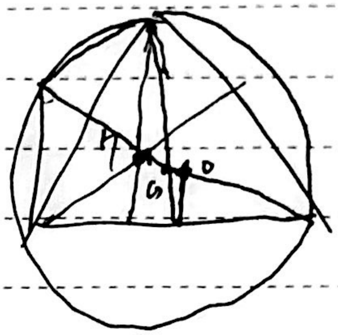
欧拉线



$(\cos\theta, \sin\theta)$

$(-\sqrt{2}, 0)$

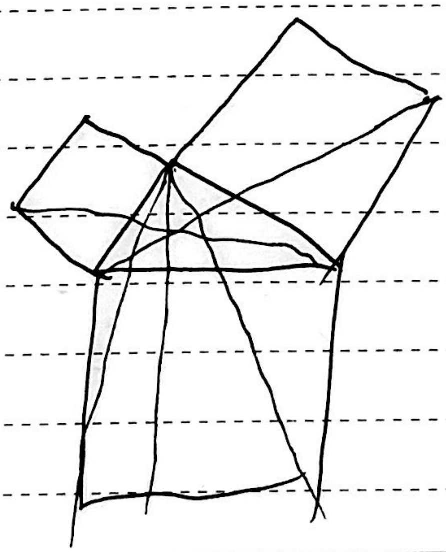
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{2}}$$




知二面角反求三面角平面角.

$(A, B, \Gamma) \to (\alpha, \beta, \gamma)$

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B\cos\Gamma}{\sin B\sin\Gamma}$$



欧拉六棱求积公式

$$(12V)^2 = \sum (aa')^2 (b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) - \left[\sum (a'b'c')^2\right]$$

$a \to a'$：对棱.

↓

四个面面积的平方

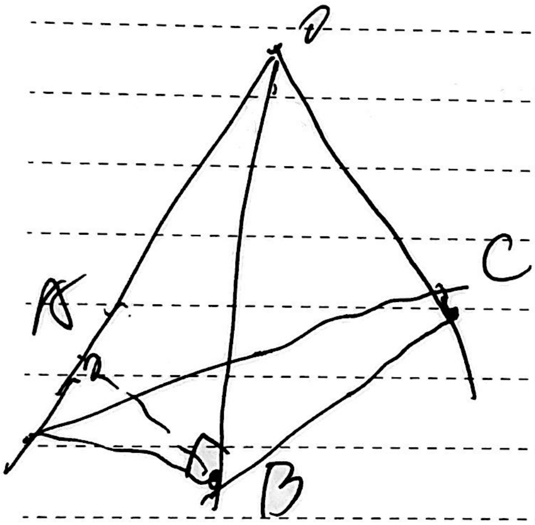
三面角余弦定理

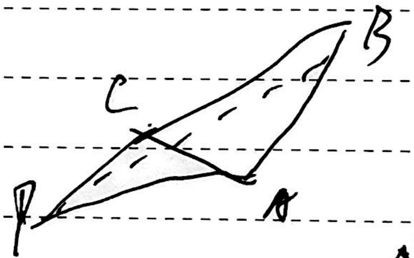
$$\cos\theta = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

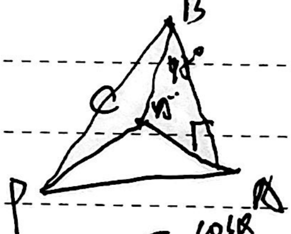
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta))(\cdots)}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

↓

类比正弦定理




$$\sqrt{1-\frac{(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\frac{\frac{\sqrt2}{2} + \frac12\cos\theta}{\frac{\sqrt3}{2}\sin\theta} = \frac{\sqrt2+\cos\theta}{\sqrt3\sin\theta}$$

→求面积

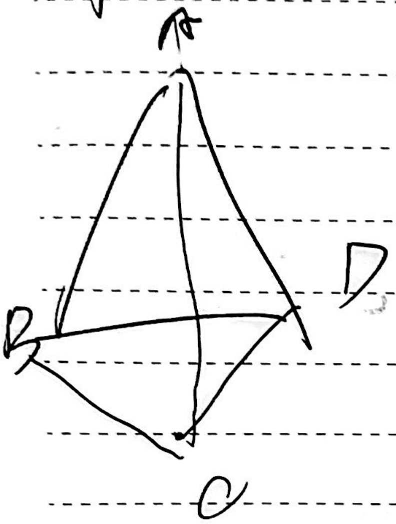
求Δ：单形构造⇒秦九韶公式为正 / Helen

求四面体，单形构造：4个面单形构造 + 余弦算体积为正

↓

求体积

体积公式



$A \to S_1$

$B \to S_2$

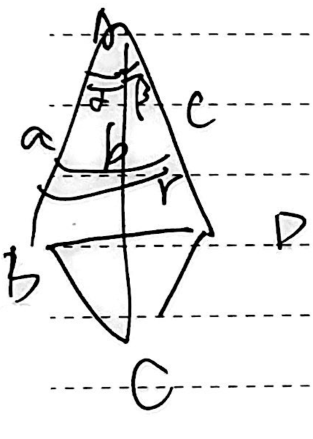
$S_1, S_2$ 夹角：$\theta_{1,2}$

$|CD| = a$

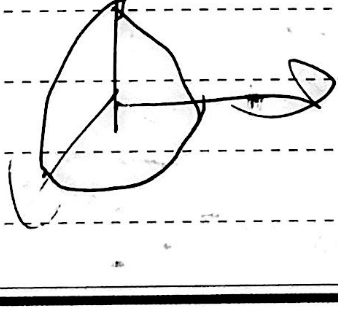
$$\Rightarrow V = \frac{2}{3} S_1 S_2 \sin\theta_{1,2} / a$$

↓

（类比 $\frac{1}{2}ab\sin C$）

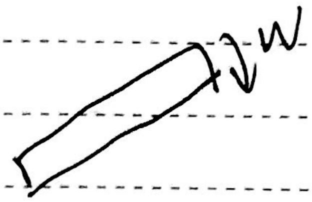


$$V = \frac{1}{6} abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$ （三面角3个顶角）



质心运动

刚体动力学



$\omega$

平动 → 运动学量：$\vec{v}$，$\vec{a}$，惯性 $m$，牛二：$\vec{F}=m\vec{a}$ → 描述平动作用

转动

$E_k$= 质心

$=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2$ → 质心

平动与转动：$\beta \sim a_c$

J 转动惯量 / I

"牛二" $M=I\beta$.

角动量：$\vec{L}=I\vec{\omega}$

动能.

动力学：考虑：质心 / 定轴

定轴

$:\frac{1}{12}ml^2$.

$I_c$ min

盘 $:\frac{1}{2}mR^2$

$I_o=I_c+md^2$

(平行轴定理)

球壳 $:\frac{2}{3}mR^2$

球体 $\frac{2}{5}mR^2$

整体：$\sum_i \vec{F_i} = \sum_i m_i \vec{a_i}$ $(\vec{f_{ij}} + \vec{f_{ji}} = \vec{0})$

$\vec{F_{外}} = \sum_i m_i \vec{a_i} = \sum m_i \ddot{\vec{r_i}} = (\sum m_i \vec{r_i})^{\cdot\cdot}$

$= \left(\frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i} \sum m_i\right)^{\cdot\cdot} = (\sum m_i \cdot \ddot{r_c})$

$\downarrow$ 质心位矢 $= M_{总} \cdot a_{质心加速度}$

~~$c_{n-1}^2 - c_n c_{n-2} = -2$，公比为1~~

$\Rightarrow \cancel{\frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} - a_{n+1}}{a_{n+2}}}$

$a_{n+1} = p a_n + q a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1} - p a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+2} - p a_{n+1}}{a_n} = q.$

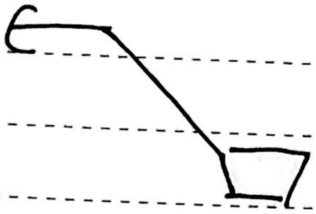
$\Rightarrow a_{n+1} a_n - p a_n^2 = a_{n-1} a_{n+2} - p a_{n+1} a_{n-1}$

$\Rightarrow a_n a_{n+1} - a_n a_{n+2} = p(a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1})$

$c_{n-1}^2 - c_n c_{n-2} = -2$

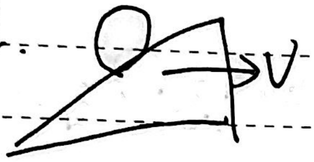
$c_{n-2}^2 - c_{n-1} c_{n-3} = -2$

绳拉小船



将$v$实分解，沿绳方向$v_1$

刚性

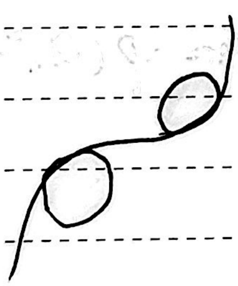


$V_n$（垂直接触面）$V_n$相等.

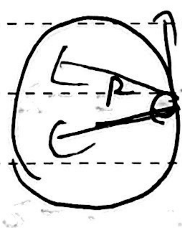
空间直角坐标系，质点运动　　斜抛最大射程45°

自然坐标系（任意形式的曲线运动）
切线方向

曲线运动：$\exists a_n=0$（可以）eg：$y=x^3$
（拐点）
$f''(x)=0$



角加：$\beta$



$a=\begin{cases}a_n\end{cases}$

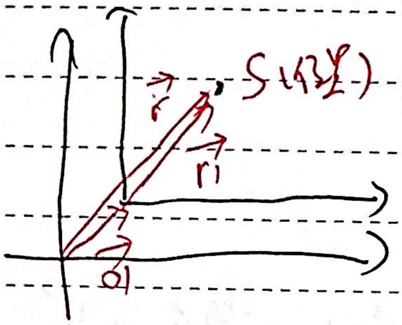
$a_n^2=((\beta t)^2R)^2$　　周出去.

$\mu mg=m\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$

$a_\tau^2=(\beta R)^2$

* $\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$ 减1 关注一下

二、转动与刚体




$\vec{r}=\vec{r'}+\vec{OO'}$ → $\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r'}}{dt}+\frac{d\vec{OO'}}{dt}$ ⇒ $\vec{v}=\vec{v'}+\vec{v}_{相}$

$\vec{a}=\vec{a'}+\vec{a}_{相对}$

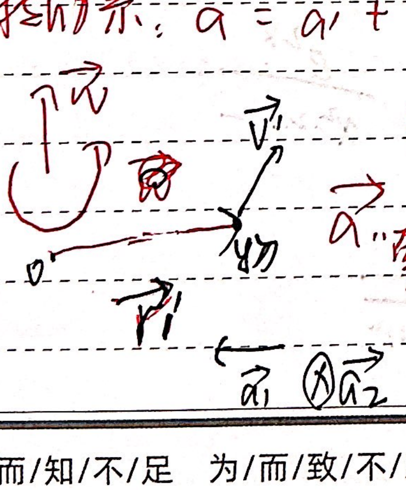
对位置求导，导，导（得v，a）

只有时间可以用头点表示 $g(t) \to \dot{g}(t)$

$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ∴ $df(x)=f'(x)dx$

烟火爆开成球形（以g为参考系）

转动系：$\vec{a}=\vec{a'}+\vec{a}_{相对}$




大小：$\omega^2 r$：向心加速度

$\vec{a}_{牵}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'})+2\vec{\omega}\times(\vec{v'})$

科里奥利加速度

右手螺旋

(地转偏向力)

$x^2 | y^3+1$



下：(1,1)，(3,2)

下证：① $x^2 | (y+1)(y^2-y+1)$

$y | x^2+1$

$y \le x$

② $x^2 \le y^3+1$，$y \le x^2+1$

$\Rightarrow x^2 \le 1+(x^2+1)^3$

$\le 1+x^6+3x^4+3x^2+1$

$2x^2$

$x^6+3x^4+2x^2+2 \ge 0$，

$x>y$ 还有 3, 5

①、如果 $y=x$：$y | y^2+1$：

$y \mid \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y} \Rightarrow y=1$

② $y<x$：

$x^2 | y^3+1$

$y | x^2+1$

$\Rightarrow x^2 y | x^2+y^3+1$，首先 $x^2 y^3$

$x^2 y \le x^2+y^3+1$

$0 \le x^2+y^3+1-x^2 y$

$= y^3+1+x^2(1-y)$

$\le y^3+1+(1-y)(y+1)^2$

$y<x$

$y+1 \le x$

负 $= (y+1)(2-y)$

$\Rightarrow y=1, y=2$

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\frac{2}{1+e^{-2x}}+\sin x$ $[-2,2]$

$\frac{e^{2x}}{x^2-2x+2}$

$(x-1)a+b+e^x$

减1

变奇函数

$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{e^x}{\sqrt{1+(x-1)^2}}$

$\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}+\sin x$

$\frac{2d+2}{3}$



T8：除数可视化

令 $3n-1=d$，$\Rightarrow n=\frac{d+1}{3}$，原命题等价于

$\Leftrightarrow d \mid \left(\frac{d+4}{3}\right)\left(\frac{2d+5}{3}\right)^2=\frac{(d+4)(2d+5)^2}{27}$

$\Rightarrow 27d \mid (d+4)(2d+5)^2$

① 由辗转相除法 $(d,d+4)=(d,4)$，不能都为1.
必要性①　$(d,2d+5)=(d,5)$

所以尝试之，排除 $d=1,3,7,9,11,13$

$d=2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20$

$\Rightarrow n=1$，× 2 × 3，× × 5 × × × 7

× ×

必要性②：　1,2,7

② $d \mid (d+4)(2d+5)^2$，展开后，约去 $d^2$，$\Rightarrow d \mid 4\times5\times5 \Rightarrow d \mid 100$

$d$：1,2,4,5,10,20,25,50,100，

且 $n=\frac{d+1}{3}$ 为整 $\Rightarrow n$ 还会为1,7

$\Rightarrow$ 1,7

T3 $(a,p)=1$: $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

$\Rightarrow 10^6 \equiv 1 \mod 7$

考虑 $11^{13} \div 56$. : $11^{13} \equiv 5^{13} \pmod 6$ ($11 \div 6 = 1 \ldots 5$)

$5^{13} \mod 6$ 可以找规律: $(-1)^{13} \mod 6$

6 $\Rightarrow 5$.

T4: ~~① 估范围. x 最多四位数. (五位, eg: $(10000+\ldots)^2$ 飞天)~~

~~② n 平方数~~

| | |
|---|---|
| 1 | 121 |
| 4 | ~~144~~ |
| 9 | 169 |
| 16 | 196 |
| 25 | 225 |
| 36 | 256 |
| 49 | 289 |
| 64 | 324 |
| 81 | 361 |
| 100 | 400 |

判断①. $S(n) \le 20$

~~如果 $S(n) \ge 20$~~

必要性

T4. 利用 mod 9 性质

$n$ 与 $S(n)$ mod 9 同余

即 $S(n) \equiv n \pmod 9$

$\equiv (S(n)+9)^2$

$\Rightarrow S(n) \equiv S^2(n) \pmod 9$

穷举 $\Rightarrow S(n) \equiv 0$ 或 $1 \pmod 9$

$\Rightarrow 1, 9, 10, 18, 19, 27, 28 \ldots$

检验充分性.

$1, 9, 10, 18, 19$

T1. $3n-1 \mid (n+1)(2n+1)^2$, $n\in N^*$, n几个 (4个)

T2. $y\le x$, $y \mid x^2+1$ 且 $x^2 \mid y^3+1$, $(x,y)$ (正整), 几对 → 20f

T3. $10^{11^{13}} \bmod 7$ (费小马)　　(周四过 $10^{11^{13}}$ 为周二)

T4. $n\in N^*$, 十进制下各位数字之和 $S(n)$.

$n=(S(n)+1)^2$. 所有符合条件n和区间 $[2000, 2500)$

T5(2) $\sum_{i=1}^{m}(i+1)^3$ 为完全平方数, m之和, 个位数和 (1不止的非正确) ✓

0×6×8×

→ 平方数末不会为

T6. $[\frac{x}{7}]=[\frac{x}{8}]+1$ 的 $x\in N^*$, 求个数　: 4

xmax

T6: ①解决[ ]的常用(甚至必用)方法) $x-1<[x]\le x$

设 $k=[\frac{x}{8}]$, 则 $[\frac{x}{7}]=k+1$

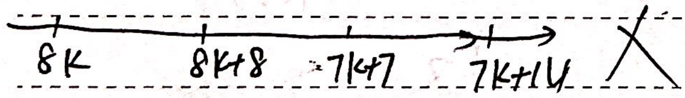
$\frac{x}{8}-1<k\le\frac{x}{8}$　　$\frac{x}{7}-1<[\frac{x}{7}]\le\frac{x}{7}$

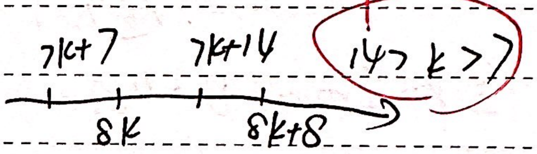
$\Rightarrow x-8<8k\le x$　　$\frac{x}{7}-1<k+1\le\frac{x}{7}$

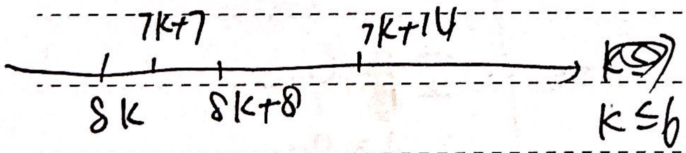
$\Rightarrow 8k\le x<8k+8$　　$x-7<7(k+1)\le x$

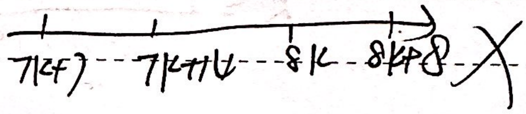
$\Rightarrow 7k+7\le x<7k+14$.

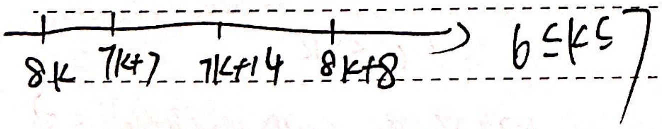
k=14? k=13? 计算 xmax.




eg: k=14. $[\frac{x}{8}]=14$. $14\times8=112$ ×

$[\frac{x}{7}]=15$. $15\times7=105$

k=13, $[\frac{x}{8}]=13$ : 104

$[\frac{x}{7}]=14$ (成立)

1. 2506 T19.

① $5\cos x+\cos(\pi-5x)$ 用Jensen不等式.

二元：梯形中位线

三元：用△重心 ∴ 凸多边形重心

② T11. 金丽衢 $\sin(A+B)=\sin^2A+\sin^2B$ → OS: $\sin^2A+\sin^2B=\sin C>\sin^2C$ (22)

锐必？ ⇒ ∠C锐 A·B不一定

③行列式(解线性方程组)

$$\begin{cases} c\cos B+b\cos C=a \\ a\cos C+c\cos A=b \\ b\cos A+a\cos B=c \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

(按照填幻方的对角)

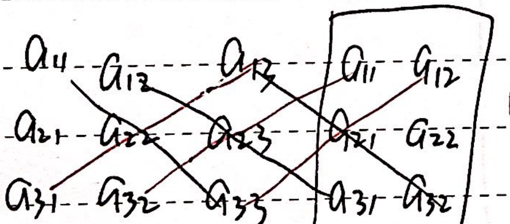
(主对角, 副对角)

↓

可证余弦定理

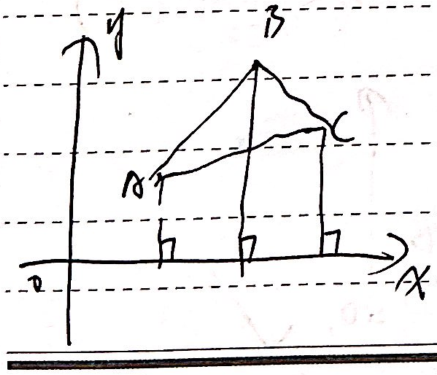
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \cancel{a_{11}a_{22}a_{33}} +$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$




黑-红

交换行列变号




用3个S梯解 $S_{\triangle ABC}$ / 向量叉乘

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

link 高维体积

动点在直线上



行列式=0为三点共线的充要(直线方程)

$(\sin\alpha)^{2'} = \sin 2\alpha$

代数余子式.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 展成二阶.（两点式）

$$\cancel{x\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - x_1\begin{vmatrix} y & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} y & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$x\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

way 1: 3个射影定理, 可以解 $\cos A, B, C$
也可解 $a, b, c$

（克莱姆定理）
证明

$\cos B\cdot c + \cos C\cdot b - a = 0$
$\cos A\cdot b + \cos B\cdot a - c = 0$
$\cos A\cdot c + \cos C\cdot a - b = 0$ → 无穷多组解

$$\begin{vmatrix} \cancel{\cos B} & \cancel{\cos C} & \cancel{-a} \\ \cancel{\cos A} & \cancel{\cos B} & \cancel{-c} \\ \cancel{\cos A} & \cancel{\cos C} & \cancel{-b} \end{vmatrix} \begin{matrix} \cos B & \cos C \\ \cos A & \cos B \\ \cancel{\cos A} & \cos C \end{matrix} = 0$$ . 怎么证?

$\Rightarrow$ ~~$-b\cos A\cos B\, a - c\cos C\cos A - a\cos A\cos C$~~

~~$+ a\cos B\cos A + \cos B\cos C + b\cos A\cos C$~~

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos B & \cos A & -1 \\ \cos C & -1 & \cos A \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & \cos C \\ \cos B & \cos A \\ \cos C & -1 \end{matrix} = -\cos^2 A - \cos^2 C - \cos^2 B - 2\cos A\cos B\cos C + 1 = 0.$$

可以 $\begin{cases} a= \\ b= \\ c= \end{cases}$ (?)

$\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$.

解A(二元一次方程) $\Delta = b^2 - 4ac$.

林根法

$\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$.

$\cos^2 A - \cancel{a} = 2 - \cos 2B - 2\sin C$

$\cos A = \frac{1}{4\cos B \sin C}$

托勒密定理

$$\begin{cases} a'^2 + c^2 = 1 & ① \\ a^2 + c'^2 = 1 & ② \\ aa' + cc' = a^2 + c^2 & ③ \end{cases}$$

①−②: $a'^2 - a^2 = c'^2 - c^2$

$(a'-a)(a'+a) = (c'-c)(c'+c)$

③: 移项, $a(a'-a) = c(c-c')$

$\Rightarrow \frac{a'-a}{c'-c} = \frac{c'+c}{a'+a} = \frac{c}{a}$

即得,

$a'c = ac'$ ④

把④×2, 插到①, ③中, 完全平方

$\Rightarrow a' + c = a + c'$,

(配方法)

Lagrange 乘数法

向

$\Delta$ $a^2 + c^2 = b$: 考虑中线定理(见例四)

(小学习题 2元)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ → 设通分

T1：分式不等式　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{p}$，P质（阿氏斯不定方程）

step I：量化，$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 通分后：$\frac{k}{p}$，$\frac{k+d}{p}$，$\frac{k+2d}{p}$，$(k,d)=1$

则 $k|p$，$(k+d)|p$，$(k+2d)|p$

$(k,k+d)=(k,d)=1$，$(k+2d)=(k,2d)=(k,2)=\begin{cases}1, & k奇\\ 2, & k偶\end{cases}$

·思路：不定方程的通解

$x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$，其中 $(m,n)=1$，$m,n$ 一奇一偶

link 证 $\sqrt{2}$ 无理：$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$

$p^2+p^2=q^2$　　$p=2mn$，$p=m^2-n^2$ 奇偶推不对

8
15　$m$ $n$
17　4 1

link 无穷递降法

step II，因分：$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ ⟺ $(2a-b)(2c-b)=b^2=(mk_1k_2)^2$

$\Rightarrow\begin{cases}2c-b=mk_1^2\\2a-b=mk_2^2\end{cases}$ （分析）　　分析质因数

↓ $\begin{cases}c=\frac{1}{2}mk_1(k_1+k_2)\\ a=\frac{1}{2}mk_2(k_1+k_2)\end{cases}$　$k_2>k_1$

$f(t)=4$

$f(x)-3^x=t \Rightarrow f(x)=3^x+t$

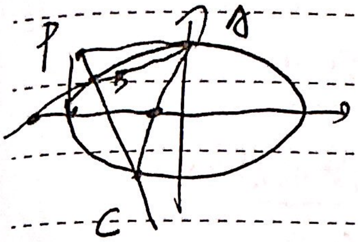
$\Rightarrow f(t)=3^t+t=4$

$\Rightarrow t=1$

$f(x)=3^x+1$

$c=\sqrt{3},\ b=1,\ a^2=4$

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$



$P(-2,1)$ 直线联立保留韦达定理

法二：

$\sum\lambda_1\lambda_2\sin^2 C\le\frac{1}{4}(\sum\lambda_1)^2$

$C\to\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

嵌入不等式

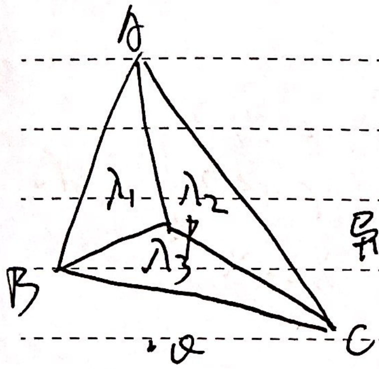
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ ① $xyz$ 排序：$x\ge y\ge z$，$\frac{1}{x}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{z}$

$\Rightarrow \frac{3}{x}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{z}$

也可以用均值不等式

向量形式的证明

类比嵌入不等式的推论



异例：负的. $\lambda_i$含义!

加权：

$\lambda_1\lambda_2c^2+\lambda_1\lambda_3b^2+\lambda_2\lambda_3a^2\le(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)R^2$

$(\sum\lambda_1)\sum\lambda_1 QA^2=\sum\lambda_1\lambda_2AB^2+(\sum\lambda_1)^2PQ^2$

令$\lambda=1$：外森比克不等式

几何不等式

令$P=I$内心，$Q=O$外心

$\Rightarrow (a+b+c)^2R^2=\sum abc^2+(a+b+c)^2OI^2$

$R^2=\frac{abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2}+OI^2$

$abc=4RS=4R\frac{1}{2}(a+b+c)r$

又有：

$9R^2=a^2+b^2+c^2+9OG^2$

令$P=G$
$Q=O$

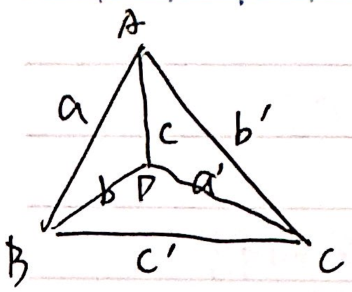
$a^2+b^2+c^2\le9R^2$

代正弦定理：$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}$

No.
Date

# 几何不等式的一些整理·~~平~~立几

## 一. 四面体中的空间托勒密不等式.




$aa'+bb'\ge cc'$，以及类似的两组轮换.

$\Delta(aa',bb',cc')$：$S=6RV_{锥}$. (克莱尔定理)

$S$ → Heron　$R$ → 外接球　$V_{锥}$ → 四面体体积.

## 二：空间余弦定理

$$\cos\langle a,a'\rangle=\frac{b^2+b'^2-c^2-c'^2}{2aa'}\quad (ABCD)$$

(可以 $c=0$ / $c'=0$ 退化) → 一组对棱相互垂直的充要条件与另两组对棱有关.

## 三：单形构造理论

①. 成$\Delta$：秦九韶/海伦 为正 (成面积)

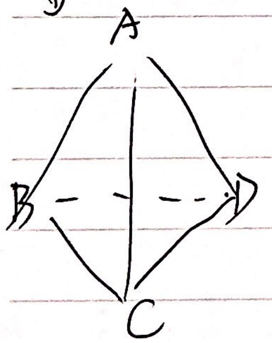
② 成四面体. 4个面$\Delta$，&用六条棱表示体积为正.

## 四：四面体体积公式：

0：Claire

1. 类比 $\frac12 ab\sin C$.

①




$A\to S_1$

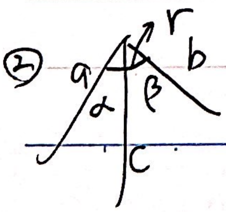
$B\to S_2$

$S_1,S_2$夹角$\theta_{1,2}$

$|CD|=a$

$$\Rightarrow V=\frac{2}{3}S_1S_2\sin\theta_{1,2}/a$$

②




用三面角：$V=\frac16 abc\sqrt{1-\sum\cos^2\alpha+2\prod\cos\alpha}$

No.

Date

三、类比 Heron-秦公式：欧拉六棱求积公式.

$$(12V)^2 = \sum (aa')^2 (b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) - [\sum (a'b'c')^2]$$

$\downarrow$

四偏曲的积

$$\left( 288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

克莱数